주최 아주대학교 | SW중심대학사업 아주대학교 LINC 3.0 사업단 경희대학교 SW중심대학사업단

후원 STARTLINK SOLVED.AC HYUNDAI MOBIS Samsung Software Membership A. N. S. i 졸업생 일동 utilForever [옥찬호]

shake!
shake!
shake!

더 넓—게 경쟁하라!

Official Solutions

제10회 경인지역 대학 연합 프로그래밍 경시대회

단국대학교 SWAG 성균관대학교 NPC 한국항공대학교 koala 아주대학교 ANSI 경희대학교 학생회 한양대학교 ERICA 0&1 인하대학교 CTP

shake!

운영

- 김현빈

출제

- 김기범 ibm2006
- 김승환 overnap
- 김현빈 akim9905
- 박병윤 rusitebeats
- 신정환 shjohw12
- 이승재 coxie
- 장민우 pani

검수

- jk410 서울대
- hamuim 경북대
- bnb2011 DGIST
- tlsdydaud1 한양대
- swoon 홍익대
- lky7674 삼성전자
- bnb2011 DGIST
- utilforever Microsoft

	문제	난이도	출제자
A	K-정렬	**Easy**	박병윤 rustiebeats
B	또또 수열 문제야	**Normal**	김현빈 akim9905
C	K 국지	**Hard**	신정환 shjohw12
D	나무핑	**Hard**	이승재 coxie
E	마슈 반데드와 마법사의 격자판	**Normal**	김기범 ibm2006
F	경인 국가의 행사	**Normal**	김현빈 akim9905
G	원소 합치기	**Normal**	박병윤 rustiebeats
H	데이터를 추가해주세요.	**Challenging**	장민우 pani
I	꽃바구니	**Hard**	김승환 overnap
J	구간이 이븐하지 않아요.	**Normal**	김현빈 akim9905

shake!

A. K-정렬

math

출제진 의도 – **Easy**

- 처음 푼 사람: **이상원 (경희대)**, 2분
- 출제자: 박병윤$^{\texttt{rustiebeats}}$

shake!

- 순열의 인덱스끼리 관계를 관찰하면, N과 K의 최대공약수로 나눈 나머지가 같은 인덱스끼리는 서로 옮겨질 수 있음을 알 수 있습니다.
- 따라서, i를 0부터 $N-1$까지 보면서 $A_i \equiv i \pmod{\gcd(N, K)}$임을 확인하면 됩니다.
- 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N)$입니다.

B. 또또 수열 문제야

`greedy, math, constructive`
출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: **유재원(경희대)**, 18분
- 출제자: 김현빈 akim9905

shake!

- N^2 개의 원소를 정렬한 뒤, 가장 작은 원소를 결정해 나가는 그리디한 전략을 사용해 봅시다.
- 첫 번째 수는 반드시 $a_1 \cdot a_1$ 이고, 이 값은 반드시 제곱수입니다. a_1 을 결정할 수 있습니다.
- 아래의 표를 생각해 볼 수 있습니다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5
a_2	a_2a_1	a_2a_2	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3a_3	a_3a_4	a_3a_5
a_4	a_4a_1	a_4a_2	a_4a_3	a_4a_4	a_4a_5
a_5	a_5a_1	a_5a_2	a_5a_3	a_5a_4	a_5a_5

✓ a_1 이 결정되면, 그 다음으로 작은 값은 a_2a_1 입니다. 이 값을 통해 a_2 를 결정할 수 있습니다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5
a_2	a_2a_1	a_2a_2	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3a_3	a_3a_4	a_3a_5
a_4	a_4a_1	a_4a_2	a_4a_3	a_4a_4	a_4a_5
a_5	a_5a_1	a_5a_2	a_5a_3	a_5a_4	a_5a_5

shake!

- a_1, a_2 가 결정 되었으므로 a_2a_2 는 지우고, 남은 값 중 가장 작은 값은 값은 a_1a_3 입니다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5
a_2	a_2a_1	a_2a_2	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3a_3	a_3a_4	a_3a_5
a_4	a_4a_1	a_4a_2	a_4a_3	a_4a_4	a_4a_5
a_5	a_5a_1	a_5a_2	a_5a_3	a_5a_4	a_5a_5

shake!

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5
a_2	a_2a_1	a_2a_2	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3a_3	a_3a_4	a_3a_5
a_4	a_4a_1	a_4a_2	a_4a_3	a_4a_4	a_4a_5
a_5	a_5a_1	a_5a_2	a_5a_3	a_5a_4	a_5a_5

- a_1, a_2, a_3 을 결정하였으니, a_1a_4 를 통해 a_4 를 결정할 수 있습니다.
- 이 과정을 반복해, N 개의 값을 모두 결정할 수 있습니다.
- `std::multiset` 등을 이용해 $\mathcal{O}\left(N^2 \log N\right)$ 에 구현할 수 있습니다.

shake!

C. K 국지

`dynamic_programming` on `tree`

출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: **유재원 (경희대)**, 66분
- 출제자: 신정환 `shjohw12`

shake!

- 트리 DP를 이용하여 문제를 해결합니다.

$dp[i][j] = i$를 루트로 하는 서브트리에 대하여, i를 포함하는 국가의 전투력이 j일 때 구하는 값의 최소

- 1번 정점에서부터 DFS를 시행하여, $dp[1][*]$의 최솟값이 답이 됩니다.
- 현재 정점을 X, X의 자식 정점을 $Y_1, Y_2, \ldots$ 라고 합시다. 초기에 $dp[X][c_X] = (U - c_X)^2$ 입니다.

- DFS를 통해 Y_1 에서의 $dp[Y]$ 갱신이 끝난 후, $dp[X]$ 를 갱신해야 합니다. 다시 말해, X 을 루트로 하는 트리와 Y_1 을 루트로 하는 트리를 합치는 과정입니다.

$$dp[X][i+j] := \min\left\{dp[X][i+j], dp[X][i] + dp[Y_1][j] - (U-i)^2 - (U-j)^2 + (U-(i+j))^2\right\}$$

- 이 과정을 $Y_2, Y_3 \ldots$ 에 동일하게 적용합니다.
- 시간 복잡도는 $\mathcal{O}\left(NU^2\right)$ 입니다.

D. 나무핑

`tree`

출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: **-**, -분
- 출제자: 이승재`coxie`

- 노드가 추가됨에 따라 트리의 지름이 어떻게 바뀌는지 관찰 해야 합니다. 기존 지름의 끝 노드를 a, b라 하고, 이 상황에서 새로운 노드 p가 추가되었다고 해봅시다.
- p와 가장 먼 노드를 알면 트리의 지름을 갱신할 수 있습니다.
- p와 가장 먼 노드는 a 또는 b입니다.
- $\max\{dist(a,b), dist(a,p), dist(b,p)\}$ 가 새로운 지름이 됩니다.
- max 값을 가지는 $dist$ 의 두 노드 쌍을 새로운 지름의 끝 노드로 갱신해 줍니다.

E. 마슈 반데드와 마법사의 격자판

`ad_hoc, constructive`
출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: **이상원 (경희대)**, 23분
- 출제자: 김기범 `ibm2006`

✓ (*Claim*) K 가 짝수라면, $2K \geq N^2 - 1$ 과 마법사의 격자판의 존재 여부는 필요충분조건입니다. K 가 홀수라면, $2K \geq N^2 - 1$ 이면서 N 은 홀수임은 마법사의 격자판이 존재 여부와 필요충분조건입니다.

1. K 가 홀수
   - 먼저, $N \times N$ 짜리 마법사의 격자판이 존재한다고 가정하겠습니다.
   - 만약 N 이 짝수라면, 각 칸에 배치된 동전 개수의 기우성에 따라 홀수가 짝수개 존재합니다.
   - 따라서 모든 동전의 개수의 합은 짝수입니다. 이는 K 가 홀수임에 모순되므로, N 은 홀수입니다.
   - 체스판 컬러링에 따른 각 칸의 기우성에 따라, 동전이 홀수인 칸은 적어도 $\dfrac{N^2-1}{2}$ 개 존재합니다.

     따라서 전체 동전의 개수는 $\dfrac{N^2-1}{2}$ 개 이상입니다.

shake!

- 이번에는 반대로 N 이 홀수이며 $2K \geq N^2 - 1$ 이 성립한다고 가정하겠습니다.
- $N^2 - 1$ 은 4 의 배수이고, 따라서 $2K \geq N^2 - 1$ 이 성립합니다.
- 먼저, $\dfrac{N^2+1}{2}$ 개의 동전들을 $x + y$ 가 짝수인 x, y 에 대해서 x 행 y 열에 하나씩 배치합니다.
- 현재까지 구성한 격자판은 마법사의 격자판입니다. 인접한 두 칸은 많아야 1 만큼 차이나며, 실제로 그 기우성이 다르기 때문입니다.
- 이제 가장 적은 동전이 올려진 칸을 골라서 두 개의 동전을 추가하는 연산을 동전이 남지 않을 때까지 반복합니다. 남은 동전의 개수는 짝수 개이므로, 모든 동전을 사용할 수 있습니다.

shake!

2. K 가 짝수
   - $N \times N$ 짜리 마법사의 격자판이 존재한다고 가정하겠습니다.
   - 동전이 홀수개 올려진 칸의 개수는 $\frac{N^2-1}{2}$, $K \geq \frac{N^2-1}{2}$ 입니다.
   - 이번에는 반대로 $2K \geq N^2 - 1$ 이라고 가정하겠습니다.
   - N 이 홀수라면 $\frac{N^2-1}{2}$ 개의 동전을, N 이 짝수라면 $\frac{N^2}{2}$ 개의 동전을 사용해서 체스판 컬러링을 하면 마법사의 격자판을 얻고, 이때 남은 동전의 개수는 짝수입니다.
   - 남은 동전들은 K 가 홀수일때와 마찬가지로 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$ 에 배치해줄 수 있습니다.

F. 경인 국가의 행사

greedy, constructive

출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: **이상원 (경희대)**, 77분
- 출제자: 김현빈[akim9905]

shake!

- ~~이 문제의 출제자는 이 문제를 무려 3번이나 틀렸습니다.~~
- 초기에 다음과 같은 그리디 전략을 생각해 볼 수 있습니다.
  - Y가 $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$개의 도시에서 이기면 승리합니다.
  - 그 와중에 X는 최대한 많은 표를 챙기는 것이 이득입니다.
  - 가장 인구 수가 가장 적은 도시부터 정확히 $\left\lfloor \frac{A_i}{2} \right\rfloor + 1$명이 Y 후보에게 투표하도록 답을 구성합니다.
- 위의 전략으로 총 투표 수는 X가, 도시별 승리 수는 Y가 많도록 답을 구성했다면, 정답은 YES입니다.

- 만약 위 방식으로 정답을 구성할 수 없다면 시도할 수 있는 것이 없을까요?
- $A = [1, 2, 3, 3]$ 의 예시에서, 2 번 도시를 비기게 만들어 정답을 구성할 수 있습니다.
- 정답을 구성할 수 없다는 뜻은, X 과 과반 이상의 표를 못 얻어왔다는 뜻입니다.
- 인구 수가 짝수인 도시를 비기도록 하여 답을 구성해 볼 수 있습니다. 해당 도시를 c 라고 합시다.

1. N 이 홀수인 경우, 비기는 도시를 만드는 것은 반드시 손해입니다.

   1.1 c 에서 Y 가 이겼다면, X 는 1 표를 얻고, Y 는 1 표를 잃게 됩니다. 그러나 Y 가 과반수 도시에서 승리해야하므로, 기존에 X 가 승리한 도시 중 하나에서 인구수의 과반수를 잃게 됩니다. (X 는 어떤 도시에서 승리했다면 그 도시의 모든 표를 다 가지기 때문입니다.)

   1.2 c 에서 X 가 이겼다면, X 는 $\frac{A_c}{2}$ 표를 잃게 됩니다. 따라서 반드시 손해입니다.

2. N이 짝수인 경우, X가 이득을 볼 수 있습니다.
   2.1 c에서 Y가 승리했다면, X는 1표를 얻고 Y는 1표를 잃습니다. 그러나 여전히 Y는 승패가 결정된 도시 중 과반수에서 승리하고 있습니다. 따라서, 이 경우 X가 1표의 이득을 볼 수 있습니다.
   2.2 c에서 X가 승리했다면, 여전히 반드시 손해입니다.

- ✓ 1개보다 더 많은 도시를 비기게 만든다면, N이 홀수인 상황이 되므로 반드시 손해해입니다.
- ✓ 따라서 위 조건을 만족하는 도시를 하나를 골라 비기도록 선택해준 뒤 동일한 전략을 사용하면 됩니다.
- ✓ 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N)$입니다.

shake!

G. 원소 합치기

`math, greedy, bitmask`

출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: **박준하 (성균관대)**, 137분
- 출제자: 박병윤 `rustiebeats`

- 주어진 연산을 K 번 한다는 것은, 주어진 배열을 $N - K$ 개의 구간으로 나눈다고 생각할 수 있습니다.
- 높은 비트부터 최댓값에서 켜질 수 있는 지 확인합니다. 배열의 맨 앞부터 OR 연산을 진행하면서, 확인하고 싶은 비트가 켜질때마다 구간을 끊고, 다음 원소부터 새로운 구간을 만들면서 확인합니다.
- 최종적으로 구간의 개수가 $N - K$ 개 이상이라면 답에서 해당 비트가 켜진다는 것을 의미하므로, 답에 추가해주고 다른 비트를 확인하면 됩니다.
- 확인해야 하는 비트는 30 개, 확인하는 과정은 $\mathcal{O}(N)$ 이므로 $\mathcal{O}(30N)$ 에 문제를 해결할 수 있습니다.

H. 데이터를 추가해 주세요.

ad_hoc, math
출제진 의도 – **Challenge**

- 처음 푼 사람: **-**, -분
- 출제자: 장민우[pani]

shake!

- 이동 방법의 개수가 정확히 M 인 경로를 모든 M 에 대해 구할 수 있을까요?
- M 을 여러 수의 합으로 구성하는 방법을 고민해 봅시다.
- 먼저, 다음과 같이 세로로 3 칸 이상 한 번에 이어지지 않은 모양의 경로들은 각 칸들에 대한 이동 방법의 개수가 모두 동일하게 유지됩니다.

```
########################
........................
########################

..########   ...########
#..#######   ##...######
##..######   ####...####
###..#####   ######...##
####..####   ########...
```

- 따라서 이러한 경로들로부터 여러 갈래를 뻗어 독립된 경로를 만들고, 각 경로를 마지막에 합친다면 M 을 여러 수의 합으로 쪼개서 구성하는 시도를 해볼 수 있습니다.
- 먼저 생각해 볼 수 있는 방법은 진법을 이용하는 것입니다. 문제의 제한조건인 314159265 는 2^{29} 보다 작으므로 2^0 부터 2^{28} 까지의 2의 거듭제곱 수들로 M 을 구성할 수 있습니다.
- 그렇다면 이때 필요한 N 은 최소 얼마일까요?
- 가장 많은 2 의 거듭제곱수들의 합으로 나타나는 수는 $2^{28}-1$ 이며, 28 개의 수의 합으로 구성해야 할 것입니다.
- 다음은 위 구성 방법의 예시의 일부분이며, 직접 계산해 보면 N 의 최소가 100 을 넘어가는 것을 알 수 있습니다. 조금 더 효율적인 방법을 찾는다 해도 제한에 맞추기엔 역부족으로 보입니다.

H. 데이터를 추가해 주세요.

```
...#################################
.#..################################
..#....#############################
#.##.#..############################
#..#..#....#########################
##.##.##.#..########################
##..#..#..#....#####################
###.##.##.##.#..####################
###..#..#..#..#....#################
####.##.##.##.##.#..################
####..#..#..#..#..#....#############
#####.##.##.##.##.##.#..############
#####..#..#..#..#..#..#....#########
######.##.##.##.##.##.##.#..########
######..#..#..#..#..#..#..#....#####
#######.##.##.##.##.##.##.##.#..####
```

1. 2 진법 대신 더 큰 진법을 이용합니다.
   - 예를 들어, 세로로 6 칸 이어진 경로는 이동 방법의 개수가 8 가지입니다.
   - $8 \uparrow$ 진법으로 M 을 쪼개서 해를 구성하는 시도를 해볼 수 있습니다. 하지만 이와 같이 진법을 늘릴 때 문제가 생기는 부분은 각 자릿수가 1 이 아닐 수 있다는 점입니다.
   - 그러나 진법의 자릿수만큼 동일한 경로를 늘리게 되면 2 진법으로 구성하는 것보다 비효율적입니다.
   - 따라서 X 진법으로 해를 구성하고자 할 때 1 부터 $X - 1$ 까지의 이동 방법의 개수를 가지는 경로를 따로 만들어서, 이를 각 독립된 경로의 마지막에 곱해주는 등의 방법을 통해 효율적으로 구성할 수 있습니다.

shake!

2. 피보나치 수를 이용
   - 세로로 k개의 격자가 이어진 경로의 이동 방법의 개수는 k번째 피보나치 수와 동일합니다.
   - 따라서 M을 피보나치 수들의 합으로 쪼개보자는 생각을 해볼 수 있습니다.

     (*Zeckendorf's Theorem*) "모든 자연수는
     연속되지 않은 피보나치 수들의 합으로 나타낼 수 있으며, 그 합의 표현은 유일하다."
   - $314159265 \le f_{43}$임을 알 수 있고, 따라서 가장 많은 피보나치 수의 합으로 나타나는 수는 $f_{42} - 1$으로, 20개의 수인 $3, 5, \ldots, 41$번째 피보나치 수들의 합으로 구성됩니다.
   - 이를 이용하면 $N \le 60$이어도 답을 구성할 수 있습니다.

H. 데이터를 추가해 주세요.

shake!

```
.#########################################
...#######################################
.#..######################################
.##...####################################
.##.#..###################################
.##.##...#################################
.##.##.#..################################
.##.##.##...##############################
.##.##.##.#..#############################
.##.##.##.##...###########################
.##.##.##.##.#..##########################
.##.##.##.##.##...########################
.##.##.##.##.##.#..#######################
.##.##.##.##.##.##...#####################
.##.##.##.##.##.##.#..####################
.##.##.##.##.##.##.##...##################
.##.##.##.##.##.##.##.#..#################
.##.##.##.##.##.##.##.##...###############
```

I. 꽃바구니

`tree`

출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: **-**, **-**분
- 출제자: 김승환[overnap]

- 냅색 문제입니다.
- 그런데 무게/용량/가치가 전부 크고 N 이 작으므로 지수적으로 풀어야겠다는 생각이 듭니다.
- 바구니 하나에 대해 문제를 풀어봅시다.
- 각 꽃을 포함하거나 포함하지 않는 모든 경우의 수를 세므로 $\mathcal{O}\left(N2^N\right)$ 입니다.

shake!

- 여러 바구니에 대해 문제를 풀어봅시다.
- 각 꽃은 하나의 바구니에만 사용할 수 있으니 각 꽃의 사용 상태를 기록합니다.

$$dp[i][state] = i\text{번째 바구니까지 꽃의 사용 상태 } state \text{일 때 답}$$

1. $new \,\&\, prev = 0 \; (new \cap prev = \emptyset)$
2. $\sum_{j \in new} A[j] \le B[i]$
3. $\sum_{j \in new} V[j] \le K$

를 만족하면 $dp[i+1][prev|new] := \max(dp[i+1][prev|new], dp[i][prev] + dp)$.

- Naïve하게 $O(N2^N + M4^N)$에 구현할 수 있지만 $N = 15$를 풀기에 너무 느립니다!
- $O(M4^N)$에서 1번 조건에 의해 안 쓰는 상태가 굉장히 많음을 알 수 있습니다.
- 1번 조건을 고려하면 dp의 전파에서 각 꽃은 세 가지 경우로 나눌 수 있습니다:
  1. 이전에도 지금도 사용하지 않음.
  2. 이전 바구니들에 사용함.
  3. 현재 바구니에 사용함.
- 이것은 $\{0, 1, 2\}^N$ 로 표현할 수 있으므로 DP 상태 전이를 $\mathcal{O}\left(3^N\right)$ 정도에 순회할 수 있습니다.
- 마지막으로 $M \geq N$인 경우 큰 바구니 순으로 N개만 보면 되기 때문에 전체 시간복잡도는 $O(N2^N + \min(N, M)3^N)$입니다.

- 평범한 비트마스크 DP를 3 진수로 짜주시면 됩니다.
- 비트 연산을 쓰지 못하기 때문에, $O(N2^N + N\min(N, M)3^N)$ 이 아니라 $O(N2^N + \min(N, M)3^N)$ 로 구현하도록 유의해 주세요.
- 비트마스크에서 부분 마스크를 순회하는 테크닉 (링크)을 아신다면 더 쉽게 구현하실 수 있습니다.

J. 구간이 이쁜하지 않아요.

brute_force
출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: **이상원 (경희대)**, 47분
- 출제자: 김현빈 akim9905

- 어떤 두 수열이 이븐하다는 것은, 두 수열이 서로에 대한 순열(permutation) 관계라는 사실과 같습니다.
- 순열 관계라는 것은, 두 수열에 포함된 모든 원소의 빈도가 서로 같다는 사실과 동치입니다.
- 연속된 부분 수열 $A[l,r]$의 절반 수열 둘이 이븐하다는 사실은 naïve하게 $\mathcal{O}\left(N\right)$에 판단할 수 있고, 총 시간 복잡도는 $\mathcal{O}\left(N^3\right)$이 되게 되어 시간 초과를 받습니다.

- $A[l, r]$ 에서 빈도수가 다른 원소의 개수를 x 라고 하겠습니다.
- 이제 $A[l, r]$ 에서 $A[l-1, r+1]$ 로 확장되는 상황에서, 각 왼쪽 절반과 오른쪽 절반에서 빈도수가 변화하는 원소는 최대 2 개 뿐입니다.
  - 왼쪽 절반 수열에서는 A_{l-1} 의 빈도수가 1 증가하고,
  - 오른쪽 절반에서는 A_{r+1} 의 빈도수가 1 증가합니다.
- 따라서 한 번 길이가 증가할 때마다 x 값은 최대 2 만큼 변화합니다.
- 이제 모든 i 에 대하여 $[i, i+1]$ 에서 시작해 길이를 2 씩 늘리며 가능한 답을 모두 탐색할 수 있습니다.
- 시간 복잡도는 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$ 입니다.