shake!

더 넓—게 경쟁하라!

Official Solutions

제11회 경인지역 대학 연합 프로그래밍 경시대회

단국대학교 SWAG 성균관대학교 NPC 한국항공대학교 koala 아주대학교 ANSI 경희대학교 학생회 한양대학교 ERICA 0&1 인하대학교 CTP

주최 아주대학교 AJOU UNIVERSITY | SW중심대학사업 National Center of Excellence in SW 아주대학교 AJOU UNIVERSITY | SW중심대학사업 National Center of Excellence in SW

후원 STARTLINK SOLVED.AC HYUNDAI MOBIS NEXON Samsung Software Membership cubic Haru_101 류지성 A. N. S. i 졸업생 일동

shake!

총괄

- 김현빈
- 이종학

출제

- 김기범ibm2006
- 김승환overnap
- 김현빈akim9905
- 신정환shjohw12
- 이승재Coxie
- 이종학js9028
- 유상혁golazcc83
- 장민우pani

검수

- 79brue MIT
- bnb2011 DGIST
- tlsdydaud1 한양대
- jthis 국민대
- jinhan814 고려대
- oh040411 연세대
- yyyy7089 경희대
- dbrua1222 아주대

shake!

	문제	난이도	출제자
A	릴레이 가위바위보 게임	**Easy**	유상혁[golazcc83]
B	히든 이벤트	**Easy**	김승환[overnap]
C	게국지	**Hard**	신정환[shjohw12]
D	^&^	**Hard**	신정환[shjohw12]
E	Swap, then record	**Hard**	유상혁[golazcc83]
F	제목은 나무 키우기로 하겠습니다. 근데 이제 삼각형을 곁들인	**Hard**	김기범[ibm2006]
G	으악그래프	**Easy**	이승재[Coxie]
H	자르기	**Normal**	이종학[js9028]
I	웜홀	**Challenging**	김현빈[akim9905]
J	i18n	**Normal**	김승환[overnap]

A. 릴레이 가위바위보 게임

implementation
출제진 의도 – **Easy**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 유상혁 golazcc83

shake!

- 가위, 바위 보가 각각 N개씩 있습니다.
- 정확히 한 라운드에서 출력이 잘못되어 손동작이 바뀌었다면,
  바뀌기 전 손동작은 총 $N-1$번 출력되고, 바뀐 후 손동작은 총 $N+1$번 출력됩니다.
- 이제 배열을 입력받고, $1, 2, 3$이 각각 몇 번 출력되었는지 센 다음 정답을 출력하면 됩니다.

B. 히든 이벤트

math, probability theory
출제진 의도 – **Easy**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 김승환$^{\texttt{overnap}}$

shake!

✓ "적어도 하나"는 다루기 어려우니 여사건으로 생각합시다.

$$P(x) = (\text{적어도 하나 포함될 확률}) = (\text{전체 확률}) - (\text{하나도 포함 안 될 확률})$$

$$= 1 - \frac{(\text{히든 이벤트가 없는, } N - M \text{개 지역 중 서로 다른 } x \text{개 지역을 고르는 경우의 수})}{(\text{전체 } N \text{개 지역 중 서로 다른 } x \text{개 지역을 고르는 경우의 수})}$$

$$= 1 - \frac{\binom{N-M}{x}}{\binom{N}{x}} = 1 - \frac{(N-M)\cdot(N-M-1)\cdots(N-M-x+1)}{N\cdot(N-1)\cdots(N-x+1)}$$

~~계산 과정은 생냑~~

- $x = 1, 2, \ldots, K$에 대한 $P(x)$를 구하고 있으니, 오른쪽 항을 누적시켜 가면서 답을 출력합시다.
- $\binom{n}{r}$을 구할 때 $0! = 1, n < r, r < 0$, 자료형의 표현 범위 등에서 실수를 하지 않아야 합니다.
- 시간복잡도는 $O(K)$입니다.

C. 게국지

graph, combinatorics
출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 신정환[shjohw12]

shake!

- 게자리 모양의 그래프는
  - 길이 4인 사이클,
  - 사이클의 네 정점 중 세 정점과 간선으로 연결된 서로 다른 세 정점을 포함하는 정점 개수 7
  - 간선 개수 7인 그래프입니다.
- 서로 다른 두 간선을 골랐을 때, 정점이 중복되지 않는다면 4개의 정점이 결정됩니다.
- 전처리를 통해 $O(M^2)$에 두 정점이 간선으로 연결돼있는 지를 알 수 있습니다.

- 이제 사이클의 세 정점을 고정하고 게의 다리에 해당하는 세 간선을 어떻게 셀지 생각해봅시다.
- 각 정점의 차수를 전처리하고 사이클 내부를 연결하는 간선을 제외하면, 사이클의 각 정점에서 바깥으로 나가는 간선의 개수는 쉽게 구할 수 있습니다.
- 게의 다리는 모두 다른 정점과 연결돼야 합니다.
- 간선을 통해 연결된 정점이 중복인 경우는 포함-배제의 원리를 통해 구할 수 있습니다.

shake!

- 아래를 정의해 봅시다.
  - 사이클의 세 정점: v_1, v_2, v_3
  - 정점 x 에서 바깥으로 나가는 간선의 개수: $d(x)$
  - 바깥으로 나가는 간선 중 정점 x, y 와 연결하는 정점이 중복되는 간선의 개수: $d(x, y)$
  - 바깥으로 나가는 간선 중 정점 x, y, z 와 연결하는 정점이 중복되는 간선의 개수: $d(x, y, z)$
- 이제 $d(x, y), d(x, y, z)$ 를 구해봅시다.
- 각 정점의 인접 리스트에서 서로 다른 두 정점을 고르면 $d(x, y)$, 서로 다른 세 정점을 고르면 $d(x, y, z)$ 를 구할 수 있습니다.

- 정답은 아래와 같습니다.

$$d(v_1) \times d(v_2) \times d(v_3) - d(v_1, v_2) - d(v_1, v_3) - d(v_2, v_3) + 2 \times d(v_1, v_2, v_3)$$

- 최악의 경우는 간선이 고르게 분포되어있지 않고, 한 정점에 몰려있는 경우입니다.
- 정점 개수 N, 간선 개수 M 일 때 나머지 모든 정점과 연결돼있는 정점의 인접 리스트에서 서로 다른 세 정점을 고르는 시간 복잡도는 $O(N^3)$, 그러한 정점은 $O\left(\frac{M}{N}\right)$ 개 입니다.
- 전체 시간 복잡도는 $O(M^2 + N^2M)$ 입니다.

D. ^&^

ad_hoc, bitmask
출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 신정환 shjohw12

- $X = 1 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus N$를 먼저 구합시다.
- ~~잘 생각해 보면,~~ N에서 해당 비트가 0이면 X에서도 0이고, N에서 해당 비트가 1이면, N이 홀수이면 0이고 N이 짝수이면 1입니다. 최하위 비트만 다른데, $N \pmod 4$가 $0, 1, 2, 3$일 때 각각 $0, 1, 1, 0$이 됩니다.
- 최상위 비트부터 현재 비트가 1이라면 유지, 0이면 1로 바뀌도록 XOR를 AND로 바꾸어 봅시다.
- 이제 X에서 비트가 1인지 0인지에 따라, 어디서 AND를 적용해야 하는지 생각해 봅시다.
- X에서의 결과를 바꿔야 한다면, 중간에 AND를 넣음으로써 해당 비트의 연산 결과가 바뀌어야 하고, X에서의 결과를 유지해야 한다면 중간에 AND를 넣어도 연산 결과가 바뀌지 않아야합니다.

shake!

- 결과가 바뀌려면 1이 포함되어야 한다는 것을 알 수 있습니다.
  - 0과 0을 XOR, AND 하면 각각 $0, 0$
  - 0과 1을 XOR, AND 하면 각각 $1, 0$
  - 1과 1을 XOR, AND 하면 각각 $0, 1$
- 특정 비트에서
  - 결과를 유지하고 싶다면 해당 비트에서 0이 나오는 구간에 AND를 적용하고,
  - 결과를 바꾸고 싶다면 해당 비트에서 1이 나오는 구간에서 AND를 적용합니다.

- 최하위 비트는 따로 생각해야 합니다.

  $x \equiv 0 \pmod 4$ 인 x 앞에서 AND를 적용해야 결과를 유지할 수 있고, 이외는 결과가 바뀝니다.

- 최상위 비트에 따라 구분해 봅시다. 여기서 2^k 는 N 을 넘지 않는 가장 큰 2 의 거듭 제곱입니다.
  - 최상위 비트의 X 가 1: 0 앞에서 AND, 따라서 AND를 적용해야 하는 수의 구간은 $[2, 2^k - 1]$
  - 최상위 비트의 X 가 0: 1 앞에서 AND, 따라서 AND를 적용해야 하는 수의 구간은 $[2^k, N]$
- 따라서, 최상위 비트 다음 비트 입장에서 보면 구간은 $000...111$ 거나, $000...000$ 가 됩니다.

shake!

- 마찬가지로, X 가 1 이라면, 결과를 유지하기 위해 0 만 있는 구간으로 구간을 좁힙니다.
- X 가 0 이라면 1 만 있는 구간으로 구간을 좁힙니다.
- 만약 구간이 0 만 있는 형태라면 해당 비트는 1 을 만들어 줄 수 없고, 구간은 유지됩니다.
- 그다음 비트 입장에서 다시 구간은 $000\ldots111$ 이거나 $000\ldots000$ 인 연속 구간이 되고, 이것은 반복됩니다.
- 각 비트에서 구간에 있는 수에 AND를 적용해서 결과를 1 로 만들어 줄 수 있는지 판단하면 됩니다.

E. Swap, then record

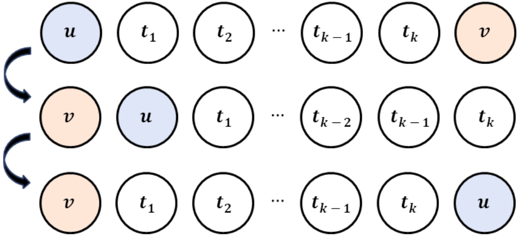
greedy
출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 유상혁golazcc83

- 기록할 정수 쌍 (u, v) 을 미리 정하고, 그 정수 쌍만 사용하여 수열을 정렬할 수 있는지 판단하면 됩니다.
- 편의상 수열 A 의 각 원소를 정점으로, 정수 쌍 (u, v) 을 정점 u, v 를 잇는 간선으로 정의하고 이를 통해 구성된 그래프를 G 라고 정의하겠습니다.

shake!

- **(관찰 1.)** G가 연결 그래프일 때, G에 속한 값을 가지는 두 원소는 서로 위치를 바꿀 수 있습니다.
- 정점 u, v 사이의 경로 중 하나를 $[u, t_1, t_2, \ldots, t_k, v]$라고 할 때
  1. 정점 v를 앞으로 보내기 위해 $(u, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, t_k), (t_k, v)$ 순으로 교환합니다.
  2. 정점 u를 뒤로 보내기 위해 $(t_{k-1}, t_k), (t_{k-2}, t_{k-1}), \ldots, (t_1, t_2), (u, t_1)$ 순으로 교환합니다.



shake!

- **(관찰 2.)** 수열 A 의 정렬된 수열을 B 라고 할 때, G 는 간선 (B_i, B_{i+1}) 만을 사용하여 구성할 수 있습니다.
- 위의 간선만 사용하면 G 는 연결 그래프가 되고, 관찰 1을 통해 모든 원소의 위치를 바꿀 수 있음이 보장됩니다.
- B_i 와 B_j 를 교환하기 위해 간선 (B_i, B_j) 대신, 인접 간선들의 경로인 $(B_i, B_{i+1}), (B_{i+1}, B_{i+2}), \dots, (B_{j-2}, B_{j-1}), (B_{j-1}, B_j)$ 을 사용할 수 있습니다.
- 또한 귀류법을 통해 위의 그래프가 최소 스패닝 트리임을 증명하면, 위의 그래프가 최적임을 증명할 수 있습니다. 따라서 답의 상한은 $B_N - B_1$ 입니다.

shake!

- **(관찰 3.)** $1 \le k < N$ 인 k에 대해, $\{A_1, \dots, A_k\} = \{B_1, \dots, B_k\}$ 이면 간선 (B_k, B_{k+1}) 을 제외하고, 답의 상한에 $B_{k+1} - B_k$ 를 뺄 수 있습니다.
- 그렇지 않다면 $j \le k; A_j = B_{k+1}$ 인 j가 존재하여 (B_k, B_{k+1}) 간선을 반드시 사용하게 됩니다.
- 위의 조건을 판단하는 방법은 여러분 마음에 달려 있습니다.
  - $\max\limits_{1 \le i \le k} A_i = \max\limits_{1 \le i \le k} B_i$ 인 k를 찾거나,
  - $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i = \sum\limits_{i=1}^{k} B_i$ 인 k를 찾거나,
  - 해싱 등

F. 제목은 나무 키우기로 하겠습니다. 근데 이제 삼각형을 곁들인

`tree, math`

출제진 의도 – **Hard**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 김기범`ibm2006`

shake!

- T 의 어떤 정점이 흥미롭다면 해당 정점을 자식으로 가지는 정점 또한 흥미롭습니다.
- 새 정점을 추가하고나면,
  1. 아직 흥미롭다고 판정되지 않은 모든 조상을 방문하며 가중치를 반영해주고,
  2. 현재 각 조상들이 흥미로운지 다시 검사합니다.
- 한 번의 검사는 서브트리의 크기가 s 일 때, $O(s \log s)$ 검사할 수 있습니다. ($O(s)$ 에 검사는 숙제)
- 1 이상 10^9 이하의 수가 45 개 있다면 그중 3 개를 선택하여 삼각형을 만들 수 있습니다.
- 따라서, 각 정점별로 검사를 하는 횟수는 $s = 45$ 회 이하입니다.
- 따라서 $O(Ns^2)$ 에 문제를 해결할 수 있습니다.

G. 으악그래프

graph, FISHING
출제진 의도 – **Easy**

- 처음 푼 사람 : , 분
- 출제자: 이승재Coxie

shake!

- ~~정답은: .n?<<'YesNo'3/=입니다.~~

- 주어진 그래프가 연결 그래프이므로 간선은 $N-1$개 이상 입니다.
- 어떨까요?
  - 만약 정확히 $N-1$개 이면 어떨까요? 으악그래프 조건을 만족합니다.
  - 만약 간선이 N개 이면 어떨까요? 사이클이 한 개 있는 그래프가 됩니다.
    - 운 나쁘게 사이클 내부 간선을 제거하게 되더라도 어쨌든 분리됩니다.
  - 만약 간선이 N개 보다 많으면 어떨까요? 사이클이 2개 이상이 됩니다.
    - 따라서, 각 사이클마다 한개씩 제거된다고 하면 분리되지 않습니다.
- $M \le N$이면 Yes, 그렇지 않으면 No를 출력합니다.

H. 자르기

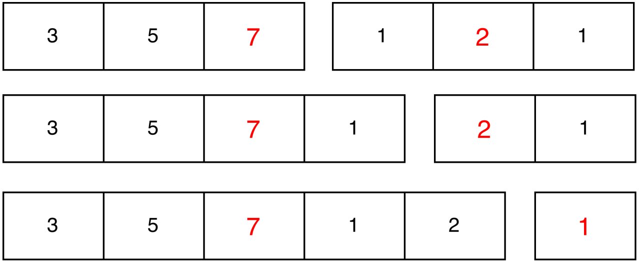
`greedy`, `case work`
출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람 : , 분
- 출제자 : 이종학 `js9028`

shake!

3	5	7	1	2	1

- 배열을 두 부분배열로 나누는 상황을 가정합시다.
- 배열의 최댓값은 분할 후에도 어느 한쪽 부분배열의 최댓값이 됩니다.



- 최댓값을 포함하는 부분배열은 원소를 더 추가해도 최댓값이 유지됩니다.
- 따라서 해당 부분배열의 크기를 극대화하는 것이 항상 유리합니다.

3		5	7	1	2	1

3	5	7	1	2		1

- 위 성질에 따라, 고려해야 할 최적의 분할은 다음 두 가지로 압축됩니다.
  1. 최댓값이 왼쪽 부분배열에 포함되는 경우
  2. 최댓값이 오른쪽 부분배열에 포함되는 경우
- 따라서 누적 합을 사용하여 $\mathcal{O}(N)$의 시간 복잡도로 해결할 수 있습니다.

I. 웜홀

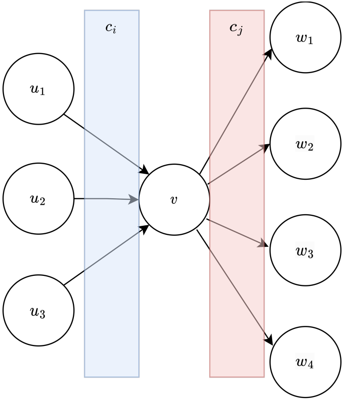
dijkstra, convex-hull trick
출제진 의도 – **Challenging**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 김현빈[akim9905]

shake!

- 아래를 정의합시다.
  - $d_1(x)$ 1 에서 출발해 x 에 도착하는 최소 시간
  - $d_N(x)$ x 에서 출발해 N 으로 도착하는 최소 시간
  - $\{c_i\}$ v 로 들어오는 간선의 가중치 집합
  - $\{c_j\}$ v 에서 나가는 간선의 가중치 집합
- 정점 기준으로 확인하고 싶습니다.
- 이제 $u \to v$ 와 $v \to w$ 를 $u \to v$ 로 바꾸는 상황을 고려해 봅시다.

shake!



- 각 정점 v 에서 고정된 c_j 에 대해 아래의 값을 구합시다.

$$\min_i \left\{d_1(u_i) + (c_i - c_j)^2 + d_N(w_j)\right\}$$

$$= \min_i \left\{d_1(u_i) + c_i^2 - 2c_ic_j + c_j^2 + d_N(w_j)\right\}$$

$$= \min_i \left\{-2c_i \times \{c_j\} + c_i^2 + d_1(u_i)\right\} + c_j^2 + d_N(w_j)$$

shake!

$$\min_i \left\{-2c_i \times \{c_j\} + c_i^2 + d_1(u_i)\right\} + c_j^2 + d_N(w_j)$$

- $\{c_j\}$를 정의역, $-2c_i$를 기울기, $c_i^2 + d_1(u_i)$를 y절편으로 보고 싶습니다.
  - $c_j^2 + d_N(w_j)$는 고정된 값입니다.
- Naïve하게 계산하면 시간초과를 받으므로, Convex hull trick을 쓰고 싶지 않을 수 없습니다.
- 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N + M \log N \log M)$입니다.

J. i18n

dynamic programming, string
출제진 의도 – **Normal**

- 처음 푼 사람: , 분
- 출제자: 김승환overnap

shake!

- S 에서 아무리 긴 부분문자열을 십진수 문자열로 바꿔도, 그 길이는 $|S| \leq 2\,000$ 이므로 최대 4 입니다.
- T 를 순차적으로 읽으면서 S 와 대응해 나갑시다.
- S 에도 숫자가 있을 수 있으므로 가능한 대응이 많을 수 있습니다.

shake!

- DP를 쓰고 싶지 않을 수 없습니다.

$dp[i] :=$ T를 인덱스 i까지 읽었을 때, 대응 가능한 S에서의 인덱스

- i, j where $dp[i] = \{\ldots, j, \ldots\}$라고 하면 전이는 아래 두 가지입니다.

1. $T[i+1]$에 $S[j+1]$가 그대로 대응하는 경우. 즉, $T[i+1] = S[j+1]$

   : $dp[i+1] := dp[i+1] \cup \{j+1\}$

2. 특정 길이 $k \leq 4$에 대해, 수로 해석한 $T[i+1:i+k]$만큼 $S[j+T[i+1:i+k]]$로 건너뛰는 경우

   : $dp[i+k] := dp[i+k] \cup \{j+T[i+1:i+k]\}$

shake!

- Index 초과나 올바르지 않은 문자열에 대한 예외 상황에 유의합시다.
- 마지막으로 $dp[|T|]$ 가 $|S|$ 를 포함하는지 확인하면 됩니다.
- 시간복잡도는 $O(4 \times |T| \times |S|)$ 이며 구현에 따라 $\log |S|$ 가 추가될 수 있습니다.