어디로 갈까? 자세한 풀이

ChanJun

September 2024

정점 v_0에서 시작해서 정점 $v_1, v_2, \cdots, v_k$로 순서대로 이동하면 총 점수는 $\sum_{i=1}^{k} p_{v_i} + W\left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor$이 됩니다. 문제의 목적은 이 값을 최대화 하는 것 입니다.
서술의 편의를 위해 다음을 정의하겠습니다.

- v_0에서 시작해서 정점 $v_1, v_2, \cdots, v_k$로 순서대로 이동하는 **경로**는 순서쌍 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$입니다. (시작 정점은 점수에 관여하지 않으므로 경로에 포함하지 않았습니다.)
- **경로의 길이**는 이동 횟수로, 위의 경로의 경우 k가 됩니다.
- **최적 경로**란 점수의 합을 최대화 하는 경로 입니다.

이 문제를 풀기 위해 가장 먼저 해야하는 관찰은 $(v, u, v, u, \cdots)$꼴의 최적 경로가 항상 존재한다는 것 입니다.

Theorem 1. *$(v, u, v, u, \cdots)$꼴의 최적 경로가 항상 존재한다.*

Proof. 길이가 k인 임의의 최적 경로 $\tau^* = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$가 있다고 합시다.

1. k가 짝수인 경우, u_1, u_2를 $p_{a_j} + p_{b_j}$를 최대화 하는 임의의 간선이 연결하는 두 정점이라고 하겠습니다. (단, $p_{u_1} \geq p_{u_2}$)
   그러면 u_1, u_2의 정의에 따라 다음이 성립합니다.

$$p_{v_j} + p_{v_{j+1}} \leq p_{u_1} + p_{u_2} \; \forall \, 1 \leq j < k \tag{1}$$

   j가 홀수일때의 부등식들을 모두 더하면

$$\sum_{j=1}^{k} p_{v_j} \leq \frac{k}{2}(p_{u_1} + p_{u_2}) \tag{2}$$

   이 됩니다.

   길이가 k인 $\tau^0 = (u_1, u_2, u_1, u_2, \cdots)$꼴의 경로에 대해 생각해 봅시다. 위 부등식에서 좌변은 τ^*의 점수의 합, 우변은 τ^0의 점수의 합에 해당합니다. 두 경로의 길이가 k로 같으므로 W에 의한 점수는 무시할 수 있습니다.

   그런데 맨 처음 τ^*를 최적 경로라고 했으므로 위의 부등식에서 등호만 성립하고, τ^0또한 최적 경로에 해당함을 알 수 있습니다.

2. k가 홀수인 경우, u_1, u_2를 $\frac{k+1}{2}p_{a_j} + \frac{k-1}{2}p_{b_j}$를 최대화 하는 임의의 간선이 연결하는 두 정점이라고 하겠습니다. (단, $p_{u_1} \geq p_{u_2}$)

   u_1, u_2의 정의에 따라 다음이 성립합니다.

$$\frac{k+1}{2}p_{v_j} + \frac{k-1}{2}p_{v_{j+1}} \leq \frac{k+1}{2}p_{u_1} + \frac{k-1}{2}p_{u_2} \; \forall \, 1 \leq j < k$$
$$\frac{k-1}{2}p_{v_j} + \frac{k+1}{2}p_{v_{j+1}} \leq \frac{k+1}{2}p_{u_1} + \frac{k-1}{2}p_{u_2} \; \forall \, 1 \leq j < k$$

   식정리를 하면 다음과 같습니다.

$$p_{v_j} + p_{v_{j+1}} + \frac{2}{k-1}p_{v_j} \leq p_{u_1} + p_{u_2} + \frac{2}{k-1}p_{u_1} \; \forall \, 1 \leq j < k \quad (3)$$
$$p_{v_j} + p_{v_{j+1}} + \frac{2}{k-1}p_{v_{j+1}} \leq p_{u_1} + p_{u_2} + \frac{2}{k-1}p_{u_1} \; \forall \, 1 \leq j < k \quad (4)$$

   $1 \leq j < k$인 모든 j에 대해, j가 홀수인 경우 부등식 (3)에 $\frac{k-j}{2}$를 곱해서, j가 짝수인 경우 부등식 (4)에 $\frac{j}{2}$를 곱해서 더하면 다음과 같습니다.

$$\frac{k+1}{2}\sum_{j=1}^{k} p_{v_j} \leq \frac{k^2-1}{4}(p_{u_1} + p_{u_2}) + \frac{k+1}{2}p_{u_1}$$

   식정리를 하면 다음과 같습니다.

$$\sum_{j=1}^{k} p_{v_j} \leq \frac{k+1}{2}p_{u_1} + \frac{k-1}{2}p_{u_2}$$

   길이가 k인 $\tau^1 = (u_1, u_2, u_1, u_2, \cdots)$꼴의 경로에 대해 생각해 봅시다. 위 부등식에서 좌변은 τ^*의 점수의 합, 우변은 τ^1의 점수의 합에 해당합니다.

   k가 짝수일때와 똑같은 논리로 k가 홀수일때도 τ^1은 최적 경로에 해당합니다.

   따라서 길이가 k인 임의의 최적 경로 $\tau^* = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$에 대해 길이가 k인 $(u_1, u_2, u_1, u_2, \cdots)$꼴의 최적 경로가 항상 존재합니다.

□

지금까지의 관찰에 따라서, 모든 간선에 대해 간선이 연결하고 있는 두 정점을 왔다갔다 하는 경로를 시뮬레이션 하는 알고리즘을 짤 수 있습니다. 이 경우 모든 간선에 대해 모든 이동 횟수를 시뮬레이션 해야 하므로 시간복잡도는 $O(MK)$가 됩니다.

이 문제에 필요한 두번째 관찰은 모든 이동 횟수를 볼 필요가 없다는 것 입니다.

다음과 같은 수열에 대해 생각해 봅시다.

$$a_n = \begin{cases} c_n & \text{if } 1 \leq n \leq T \\ a_{n-T} + c & \text{if } T < n \end{cases}$$

(단 $c, c_1, c_2, \cdots, c_T, T$는 상수)

이러한 수열은 주기가 T인 산술 준주기 함수로 볼 수 있습니다. (산술 준주기 함수에 대해 알 필요는 없습니다. 단순히 서술의 편의를 위해 언급한것 입니다.) 만약 이 수열에서 특정한 연속한 구간에서 최솟/최대값을 구하라고 하면 주어진 구간의 앞에서부터 T개, 뒤에서부터 T개의 원소들만 확인하면 됩니다.

이러한 원리를 사용해서 모든 이동 횟수가 아닌 매우 적은 수의 이동 횟수만 시뮬레이션 할 것입니다.

길이가 k인 $(u_1, u_2, u_1, u_2, \cdots)$꼴의 경로에 대해 생각해 보겠습니다. 이 경로의 k에 대한 점수를 $f(k)$라고 하겠습니다.

$f(k)$는 $0 \le k \le K$일때 주기가 $2R$인 산술 준주기 함수 이므로 앞, 뒤에서부터 $2R$개씩만 확인해도 최댓값을 얻을 수 있습니다. 그런데 구간 $0 \le k < 2R$, $K-2R < k \le K$를 잘 쪼개면 주기가 2인 산술 준주기 함수로 분해할 수 있습니다.

위의 원리에 따라 다음의 이동 횟수들을 확인하면 됩니다.

$$\{k | k = aR + b, a \in \{1, 2, l-2, l-1, l\}, b \in \{1-R, 2-R, -2, -1, 0\}\}$$

(단, $l = \left\lfloor \frac{K+R-1}{R} \right\rfloor$)

추가로, 예외 처리를 위해 $0, K-1, K$까지 고려해 주면 됩니다.

이제 확인해야 하는 이동 횟수의 경우가 상수 수준으로 작아졌기 때문에 $O(M)$으로 문제를 풀 수 있습니다.