Happy Birthday Lumi! 2025

toycartoon ohwphil wizardrabbit ai4youej index vkdldjvkdnj gubshig yijw0930 eric00513 qvixnh22 lighter

by

djeleanor2

문제		의도한 난이도	출제자
A	루미의 진정한™ 보라색 찾기	**Easy**	djeleanor2
B	현실적인 생일 축하 방안	**Easy**	djeleanor2
C	트레이드 AI 만들기	**Normal**	djeleanor2
D	생일 멘션이 너무 많아	**Normal**	djeleanor2
E	루미의 28번째 생일	**Hard**	djeleanor2
F	루미의 스트레스 해소하기	**Hard**	djeleanor2
G	짬뽕 369	**Superhard**	djeleanor2
H	루미의 생일파티장 꾸미기	**Superhard**	ohwphil
EX	루미의 생일파티장 꾸미기 (EX)	**EX**	ohwphil

A. 루미의 진정한™ 보라색 찾기

#arithmetics, #math

출제진 의도 – **Easy**

- 제출 453번, 정답 141명 (정답률 41.060%)
- 처음 푼 사람: **dong5995**, 3분
- 출제자: **djeleanor2**

- 주어진 수식을 따라 구현하면 됩니다.
- 만약, 정수 나눗셈을 이용하여 비교하고 싶다면 보정하기 전 H 값이 음수가 될 수 있으니 연산 순서에 주의합시다.
- H, S를 계산할 땐 정수 나눗셈을 쓰면 틀릴 수 있습니다.
  - 대부분의 언어의 정수 나눗셈은 소수점 아래를 절사하는 round-towards-zero 방식을 사용합니다.
- 또한, 진정한™ 보라색을 판정할 때 H, S, V를 정수로 캐스팅하면 틀릴 수 있습니다.

B. 현실적인 생일 축하 방안

#implementation, #arithmetics, #string,

#hash_set, #data structures

출제진 의도 – **Easy**

- 제출 197번, 정답 180명 (정답률 74.088%)
- 처음 푼 사람: **p_ce1052**, 3분
- 출제자: **djeleanor2**

B. 현실적인 생일 축하 방안

- N 과 M 의 제한이 상당히 작은 관계로, 배열 속에 넣고 인덱스를 내내 찾는 방식으로 풀면 됩니다.
- 별도로 `dict`, `std::map`, HashMap 등을 사용하여 풀어도 됩니다.

C. 트레이드 AI 만들기

#parsing, #implementation

출제진 의도 – **Normal**

- 제출 42번, 정답 28명 (정답률 66.666%)
- 처음 푼 사람: **ad1096**, 19분
- 출제자: **djeleanor2**

C. 트레이드 AI 만들기

- 지문을 따라 잘 파싱 후 구현합니다.
- 주의하실 점은 자신이 담보 대출 페널티를 진 재산을 상대에게 트레이드로 넘기면 넘긴 후에는 상대에게 담보 대출 페널티를 지게 해야한단 것입니다.
- 본인과 상대의 보유 도시 현황, 담보 대출의 담보물로 설정된 도시의 현황, 트레이드로 제시한 도시 현황을 비트마스크로 바꾸면 구현량을 줄일 수 있습니다.

D. 생일 멘션이 너무 많아

#binary_search, #math, #prefix_sums

출제진 의도 – **Normal**

- 제출 144번, 정답 38명 (정답률 27.778%)
- 처음 푼 사람: **sorohue**, 9분
- 출제자: **djeleanor2**

D. 생일 멘션이 너무 많아

- 일단, 2회 이상 멘션을 보낸 사람들의 평균 멘션 수가 준비된 메시지 수보다 많으면 매크로 의심을 피할 수 없으므로, -1을 출력합니다.
- 평균 멘션 수 이하로 보낸 사람 중 i회 멘션을 보낸 사람의 수를 찾는 문제입니다.

D. 생일 멘션이 너무 많아

- 평균 멘션 수 이하로 멘션을 보낸 사람의 수를 P라 할 때, i번 메시지는 i회 이상 멘션을 보낸 사람에게만 가야합니다.
- 이는 계차수열을 구하여 누적합을 하는 방식으로 구할 수 있습니다.
  - M까지만 구하면 되는 이유는 어차피 평균 메시지가 M을 넘으면 매크로 의심을 피할 수 없기 때문입니다.
- 마지막으로 1번 메시지를 보낼 대상은 모든 사람들이기 때문에, 1번 메시지를 보낼 사람은 N명입니다.
- 이 풀이의 시간복잡도는 각 인원을 순회하는데 $\mathcal{O}(N)$, 누적합을 구하는데 $\mathcal{O}(M)$이므로, $\mathcal{O}(N+M)$입니다.

D. 생일 멘션이 너무 많아

- 별해로 정렬 후 이분탐색을 이용할 수 있습니다.
- 2회 이상 멘션을 보낸 사람의 수를 구하는데 이분탐색 1회,
- 2회 이상 멘션을 보낸 사람의 평균 멘션 수가 어느 위치에 있는지를 찾기 위해 이분탐색 1회,
- i회 이상 멘션을 보낸 사람 중 평균 멘션 이하로 멘션한 사람의 수를 찾기 위해 M번 이분탐색을 하면 됩니다.
- 이 풀이의 시간복잡도는 $\mathcal{O}((N + M)\log(N))$입니다.

E. 루미의 28번째 생일

#implementation, #math

출제진 의도 – **Hard**

- 제출 34번, 정답 5명 (정답률 20.588%)
- 처음 푼 사람: **dong5995**, 59분
- 출제자: **djeleanor2**

E. 루미의 28번째 생일

- 지문을 따라 구현하면 됩니다.
- 이 때 주의해야할 점은 다음과 같습니다.
  - 연 단위로 계산할 때는 실수 연산 말고 분수로 계산해야합니다.
  - 태어난 시점/현재 시점을 단위로 변환할 때는 그 시점의 해당하는 길이를 기준으로 변환해야합니다.

F. 루미의 스트레스 해소하기

#knapsack, #dp

출제진 의도 – **Hard**

- 제출 32번, 정답 2명 (정답률 6.250%)
- 처음 푼 사람: **shoo040113**, 135분
- 출제자: **djeleanor2**

F. 루미의 스트레스 해소하기

- DAG DP 문제입니다. $dp[i][j][k]$ 를 i 번째 취미까지를 계산했을 때, j 시간이 지나고 k 만큼의 체력을 소모했을 때의 스트레스 지수의 최솟값이라 가정합니다.
- 그러면 i 번째 취미가 소모 시간 H, 체력 소모량 M 이라 할 때,
  - i 번째 취미를 즐길 수 있다면,
    $dp[i][j][k] = \max(\min(dp[i-1][j][k], dp[i-1][j][k-1], dp[i-1][j-1][k] + F,$
    $dp[i-1][j-H][k-M] + L_{eff}), 0)$
  - i 번째 취미를 즐길 수 없다면,
    $dp[i][j][k] = \max(\min(dp[i-1][j][k], dp[i-1][j][k-1], dp[i-1][j-1][k] + F), 0)$

입니다.

- 주의사항은 다음과 같습니다.
  - **취미를 즐기지 않으면** 1 시간 당 F 만큼의 스트레스가 증가합니다.
  - $E > 100$ 일 때 L_{eff} 는 음수가 됩니다. 이 때 음수 / 양수의 행동이 언어별로 다르므로 주의합시다.
  - 스트레스의 최솟값은 0 입니다.
  - dp 테이블의 차원은 3 차원이지만, 메모리 초과가 발생하므로, 2 차원으로 바꿔서 계산합니다.
- 이 풀이의 시간복잡도는 $\mathcal{O}(NBC)$, 공간복잡도는 $\mathcal{O}(BC)$ 입니다.

G. 짬뽕 369

#binary_search, #math, #implementation

출제진 의도 – **Superhard**

- 제출 8번, 정답 1명 (정답률 12.500%)
- 처음 푼 사람: **iktk**, 156분
- 출제자: **djeleanor2**

G. 짬뽕 369

- N 번째 차례까지 외친 수 또는 단어의 길이를 이용하여 짬뽕 문자열이 몇 번째 차례부터 걸쳐 있는지를 이분탐색으로 세면 됩니다.
- 짬뽕 문자열이 걸쳐 있는 첫 번째 차례를 계산하면, 그 때부터는 수를 하나씩 순회해 나가며 외칠 수 혹은 단어를 계속 추적해 나가며 문자열에 더해 나가면 됩니다.
- 이 때 주의해야할 점은 다음과 같습니다.
  - 짬과 뽕이 번갈아 가면서 나타납니다.
  - 짬뽕을 외치는 때에는 짬과 뽕을 번갈아 외치는데에 영향을 주지 않습니다.
  - 두 자리 이상인 숫자 중 짬뽕을 외쳐야할 시점과 짬/뽕을 외쳐야할 수의 개수를 계산하는데 주의해야합니다.
- 이 풀이의 시간복잡도는 $\mathcal{O}(T(\log^2 L + R - L))$ 입니다.

H. 루미의 생일파티장 꾸미기

#math, #number_theory, #euler_phi

출제진 의도 – **Superhard**

- 제출 41번, 정답 6명 (정답률 14.634%)
- 처음 푼 사람: **p_ce1052**, 25분
- 출제자: **ohwphil**

H. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 타일의 가로의 길이는 $xL(1 \le x \le N)$ 꼴이고, 가로의 길이가 xL 로 고정되었을 때에 세로의 길이는 xL 이하이면서 xL 과 서로소인 양의 정수여야 하므로 $\varphi(xL)$ 가지입니다.
- 따라서 $\sum_{x=1}^{N} \varphi(xL)$ 의 값을 구하면 됩니다.

H. 루미의 생일파티장 꾸미기

- $\varphi(x)$가 곱셈적 함수이므로, $f(x) := \dfrac{\varphi(xL)}{\varphi(L)}$를 생각해봅시다.
- x와 L이 공통으로 가지는 소인수를 p_i, x만 가지는 소인수를 q_j, L만 가지는 소인수를 r_k라 해서 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$x = \prod_i {p_i}^{a_i} \prod_j {q_j}^{b_j}$$

$$L = \prod_i {p_i}^{c_i} \prod_k {r_k}^{d_k}$$

$$xL = \prod_i {p_i}^{a_i + c_i} \prod_j {q_j}^{b_j} \prod_k {r_k}^{d_k}$$

✓ 그러면,

$$\varphi(x) = \prod_i (p_i - 1){p_i}^{a_i - 1} \prod_j (q_j - 1){q_j}^{b_j - 1}$$

$$\varphi(L) = \prod_i (p_i - 1){p_i}^{c_i - 1} \prod_k (r_k - 1){r_k}^{d_k - 1}$$

$$\varphi(xL) = \prod_i (p_i - 1){p_i}^{a_i + c_i - 1} \prod_j (q_j - 1){q_j}^{b_j - 1} \prod_k (r_k - 1){r_k}^{d_k - 1}$$

- 따라서,

$$f(x) = \varphi(x) \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1}$$

- $\varphi(x)$ 를 에라토스테네스의 체와 같은 방식으로 배열 속에 전부 구한 다음, 뒤의 특별한 값을 곱해 보정해준 뒤 합하고 $\varphi(L)$ 을 곱하면 됩니다.
- 시간복잡도는 $\mathcal{O}(F(L) + N\log(\log(N)) + N\log(L))$ 입니다. ($F(L)$ 은 L 의 소인수분해 시간복잡도)

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기 (EX)

`#math, #number_theory, #euler_phi, #mobius_inversion, #pollard_rho, #miller_rabin`

출제진 의도 – **EX**

- 제출 11번, 정답 0명 (정답률 0.000%)
- 처음 푼 사람: **-**, -분
- 출제자: **ohwphil**

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- $\sum_{x=1}^{N} \varphi(xL)$ 의 값을 더 빠르게 구할 수 없을까요?
- 우선 L 을 소인수분해한 결과를 $L = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ 라고 합시다.
- $\mathbb{P}(x)$ 를, x 의 소인수들의 집합으로 정의해 봅시다. ($x = 1$ 일 때는 $\mathbb{P}(1) = \emptyset$)
- 예를 들어, $\mathbb{P}(12) = \{2, 3\}$ 입니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 이제 다음과 같은 Claim을 해보겠습니다.
- Claim: $\sum_{x=1}^{N} \varphi(xL) = \varphi(L) \sum_{\mathbb{P}(d) \subseteq \mathbb{P}(L)} \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{N}{d} \rfloor} \varphi(x)$ 입니다.
- 여기에서 $\mathbb{P}(d) \subseteq \mathbb{P}(L)$ 는 $\mathbb{P}(d)$ 가 $\mathbb{P}(L)$ 의 부분집합임을 의미합니다. 즉, d 는 L 의 소인수들의 곱으로 이루어진 수입니다.
- 예를 들어서, $L = 12$ 에 대해서 이 조건을 만족하는 d 는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18$ 등이 있습니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 일단, $\varphi(xL) = p_1^{e_1-1} \cdots p_k^{e_k-1} \varphi(xp_1 \cdots p_k)$ 임을 알 수 있습니다.
- 따라서 이 Claim이 L이 square-free일 때 성립함을 보이면 충분합니다.
- 이제, L이 k개의 서로 다른 소수의 곱이라고 가정하고 귀납법으로 증명해보겠습니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- $k = 1$일 때, $L = p$이라고 해보겠습니다.
- 이 때,

$$\sum_{x=1}^{N} \varphi(xp) = \sum_{\substack{p|x \\ x \le N}} \varphi(xp) + \sum_{\substack{p\nmid x \\ x \le N}} \varphi(xp)$$

$$= \sum_{\substack{p|x \\ x \le N}} p\varphi(x) + \sum_{\substack{p\nmid x \\ x \le N}} (p-1)\varphi(x) = \sum_{\substack{p|x \\ x \le N}} \varphi(x) + \sum_{\substack{p|x \\ x \le N}} (p-1)\varphi(x) + \sum_{\substack{p\nmid x \\ x \le N}} (p-1)\varphi(x)$$

$$= \sum_{\substack{p|x \\ x \le N}} \varphi(x) + \sum_{x=1}^{N} (p-1)\varphi(x) = \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor} \varphi(xp) + \sum_{x=1}^{N} (p-1)\varphi(x)$$

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

$$= \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor} \varphi(x) + \varphi(p) \sum_{x=1}^{N} \varphi(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor} \varphi(x) + \varphi(p) \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor} \varphi(x) + \varphi(p) \sum_{x=1}^{N} \varphi(x) = \cdots$$

이므로 이 Claim이 $k = 1$일 때 성립함을 알 수 있습니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 이제 소인수가 k 개인 L 에 대해서 이 Claim 이 성립한다고 가정하겠습니다.
- $L = p_1 p_2 \cdots p_k, L' = p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1}$ 이라고 해보겠습니다.
- 위와 마찬가지 논리로,

$$\sum_{x=1}^{N} \varphi(xL') = \sum_{\substack{p_{k+1} \mid x \\ x \le N}} \varphi(xL') + \sum_{\substack{p_{k+1} \nmid x \\ xi \le N}} \varphi(xL')$$

$$= \sum_{\substack{p_{k+1} \mid x \\ x \le N}} p_{k+1} \varphi(xL) + \sum_{\substack{p_{k+1} \nmid x \\ x \le N}} (p_{k+1} - 1) \varphi(xL)$$

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

$$= \sum_{\substack{p_{k+1} \mid x \\ x \leq N}} \varphi(xL) + \sum_{\substack{p_{k+1} \mid x \\ x \leq N}} (p_{k+1} - 1)\varphi(xL) + \sum_{\substack{p_{k+1} \nmid x \\ x \leq N}} (p_{k+1} - 1)\varphi(xL)$$

$$= \sum_{\substack{p_{k+1} \mid x \\ x \leq N}} \varphi(xL) + \sum_{x=1}^{N} \varphi(p_{k+1})\varphi(xL)$$

$$= \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p_{k+1}} \right\rfloor} \varphi(xLp_{k+1}) + \sum_{x=1}^{N} \varphi(p_{k+1})\varphi(xL)$$

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

$$= \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p_{k+1}} \right\rfloor} \varphi(xL') + \varphi(L') \sum_{x=1}^{N} \varphi(xL)$$

$$= \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p_{k+1}^2} \right\rfloor} \varphi(xL') + \varphi(L') \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{p_{k+1}} \right\rfloor} \varphi(xL) + \varphi(L') \sum_{x=1}^{N} \varphi(xL) = \cdots$$

- ✓ $\sum_{x=1}^{N} \varphi(xL)$ 의 형태를 생각해 보면, 우리는 이 Claim이 $k+1$일 때 성립함을 알 수 있습니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 따라서 우리는 $\mathbb{P}(d) \subseteq \mathbb{P}(L)$ 인 d를 빠르게 구하고, 각 d에 대해서 $\sum_{i=x}^{\lfloor \frac{N}{d} \rfloor} \varphi(x)$ 를 빠르게 구하면 됩니다.
- L의 소인수들을 폴라드 로 알고리즘을 이용하여 구한 뒤, 각 소인수에 대해서 백트래킹하는 방법, 혹은 큐와 집합 등의 자료구조를 이용하여 모든 d를 생성해 주는 방법 등으로 첫 번째 목표를 달성할 수 있습니다.
- L이 서로 다른 소수 $C := 15$개의 곱으로 이루어진 합성수 $2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 47$ $= 614\,889\,782\,588\,491\,410$인 경우 $d \leq N$을 만족하면서 $\mathbb{P}(d) \subseteq \mathbb{P}(L)$인 d의 개수는 $D := 968\,531$개로 가장 많은데, 크지 않은 수이기 때문에 시간 안에 모든 d를 생성하는 것이 가능합니다.

EX. 루미의 생일파티장 꾸미기

- 두 번째 목표를 달성하기 위해서는 Mertens trick(또는 xudyh’s sieve)을 이용해야 합니다.
- Mertens trick의 특성상 $\sum_{x=1}^{N} \varphi(x)$의 값을 구하면, 모든 양의 정수 e에 대하여 $\sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{N}{e} \right\rfloor} \varphi(x)$의 값이 동시에 구해집니다.
- 따라서 총 시간복잡도 $\mathcal{O}(L^{1/4} + N^{2/3} + CD)$로 문제를 풀 수 있습니다.