2022 ICPC Sinchon Summer Algorithm Camp Contest Solution

Official Solutions

신촌지역 대학생 프로그래밍 동아리 연합

2022년 8월 20일

문제		의도한 난이도	출제자
1A	단순한 문제 (Small)	**Beginner**	tlsdydaud1
1B	에어팟	**Beginner**	lms0806
1C	장신구 명장 임스	**Easy**	lms0806
1D	기술 연계마스터 임스	**Easy**	lms0806
1E	핸들 뭘로 하지	**Medium**	gumgood
1F	Tipover Transform	**Hard**	tlsdydaud1
1G	무자비한 최단경로	**Hard**	djs100201
2A	단순한 문제 (Large)	**Easy**	tlsdydaud1
2B	토큰	**Medium**	tlsdydaud1
2C	반짝반짝 3	**Medium**	lky7674
2D	수열의 점수	**Hard**	gumgood
2E	Mexor Tree	**Hard**	djs100201
2F	전깃줄 연결	**Challenging**	gumgood
2G	까다로운 형제	**Challenging**	gumgood

240

1A. 단순한 문제 (Small)

`bruteforcing`, `math`

출제진 의도 – **Beginner**

- ✓ 제출 59번, 정답 52명 (정답률 88.136%)
- ✓ 처음 푼 사람: **junlee1216**, 2분
- ✓ 출제자: `tlsdydaud1`

1A. 단순한 문제 (Small)

240

- T와 a, b, c의 범위가 작으므로 가능한 쌍을 모두 탐색하면 됩니다.
- 시간복잡도는 $O(Tabc)$ 입니다.

240

1B. 에어팟

`simulation`, `implementation`

출제진 의도 – **Beginner**

- ✓ 제출 113번, 정답 46명 (정답률 40.708%)
- ✓ 처음 푼 사람: **kgmin604**, 11분
- ✓ 출제자: `lms0806`

1B. 에어팟

240

- 이전 핸드폰 종류와 이후 연결할 핸드폰의 종류를 비교하면서 풀면 됩니다.
- 현재 에어팟의 소모량이 100 이상이 되면, 소모량은 초기상태로 돌아갑니다.
- 출력은 누적 소모량이 아닌, 현재 에어팟의 소모량을 출력하시면 됩니다.

240

1C. 장신구 명장 임스

`sort`, `greedy`

출제진 의도 – **Easy**

- ✓ 제출 78번, 정답 49명 (정답률 62.821%)
- ✓ 처음 푼 사람: **gong29**, 11분
- ✓ 출제자: `lms0806`

1C. 장신구 명장 임스

240

- 메이플스토리 전문 기술 시스템을 문제로 만들어 보았습니다.
- 결국 최대한 많은 양의 장신구를 만드는 것이 목적이므로, 소모되는 피로도가 적은 장신구부터 만드는 것이 이득임을 알 수 있습니다.
- 따라서 장신구를 피로도 오름차순으로 정렬한 뒤, 현재 피로도로 장신구를 제작 할 수 있는지 판단해줍니다.
- 장신구를 제작할 수 있는 상태라면 현재 장신구의 제작 피로도를 현재 피로도에 더해줍니다.
- 현재 피로도가 200 미만이라면 장신구를 제작 할 수 있는 상태입니다.
- 정해는 $O(logN)$ 이지만 $O(N^2)$ 정렬로도 해결 가능한 문제입니다.

240

1D. 기술 연계마스터 임스

`stack`, `implementation`, `simulation`
출제진 의도 – **Easy**

- ✓ 제출 109번, 정답 39명 (정답률 36.697%)
- ✓ 처음 푼 사람: **youvebeen**, 20분
- ✓ 출제자: `lms0806`

- ✓ 문제의 기술 종류에는 $[1-9], L, R, S, K$ 이 있습니다.
- ✓ R 스킬 전에 L 스킬이, K 스킬 전에 S 스킬이 있는지 검사해야합니다.
- ✓ 앞에서부터 반복문을 돌리며 L 과 S 의 개수를 저장해주고, R 과 K 가 등장할 때 마다 각 개수를 1 씩 빼줍니다.
- ✓ 만약 이전에 충전된 스킬이 없었다면 그대로 스킬 사용을 멈추는 것을 주의해야합니다.
- ✓ 시간복잡도 $O(N)$ 에 해결 가능합니다.

1E. 핸들 뭘로 하지

`bfs`, `greedy`

출제진 의도 – **Medium**

- ✓ 제출 185번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `gumgood`

1E. 핸들 뭘로 하지

240

- ✓ 모든 노드는 루트에서 해당 노드로 가면서 얻을 수 있는 문자열과 대응됩니다.
  - 리프 노드는 효규가 얻을 수 있는 문자열에 해당합니다.
  - 리프를 제외한 노드는 효규가 얻을 수 있는 문자열의 접두사에 해당합니다.
- ✓ 모든 리프 노드에 해당하는 문자열 중 사전 순으로 가장 마지막에 오는 것을 찾는 문제입니다.
- ✓ 하지만 모든 리프 노드에 대해 문자열을 단순 비교하는 경우 시간복잡도는 $O(N^2)$ 으로 TLE(시간 초과)를 받게 됩니다.

다음과 같이 관찰해봅시다.

- ✓ 두 노드의 깊이가 같다면 대응되는 문자열의 길이 또한 같습니다.
- ✓ 이때 두 문자열이 다르다면 사전 상 앞에 오는 노드와 그 자식들은 정답이 될 수 없습니다.
  - 따라서 정답이 될 수 있는 후보 노드들은 모두 같은 문자열에 대응됩니다.
  - 즉, 이 문자열이 정답의 접두사가 됩니다.
- ✓ 따라서 트리를 깊이 순으로 탐색하면서 정답 문자열을 앞 글자부터 하나식 결정할 수 있습니다.

1. 먼저, 루트 노드가 후보 노드가 됩니다.
2. 후보 노드들의 자식 노드 중 사전 순으로 가장 마지막에 오는 노드들을 고릅니다.
   - 각 깊이의 후보 노드들은 앞 글자들이 모두 결정되어있기 때문에 노드에 적혀 있는 문자 하나만 비교하면 됩니다.
   - 이렇게 고른 노드들이 새로운 후보 노드가 됩니다.
3. 후보 노드를 갱신하는 2. 과정을 더 이상 자식 노드가 없을 때까지 반복합니다.
4. 마지막에 남아있는 후보 노드들이 정답 문자열에 대응하는 노드가 됩니다.

1E. 핸들 뭘로 하지

240

- ✓ 각 깊이마다 문자가 하나가 결정되므로 이를 이어붙이면 정답이 됩니다.
- ✓ 트리를 깊이 순으로 탐색하는 BFS 알고리즘으로 구현할 수 있습니다.
- ✓ 따라서 전체 시간복잡도 $O(N)$에 해결할 수 있습니다.

240

1F. Tipover Transform

dp

출제진 의도 – **Hard**

- 제출 1번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- 처음 푼 사람: —, —분
- 출제자: `tlsdydaud1`

1F. Tipover Transform

240

- 게임을 클리어하기 위해 추가해야 하는 큐브 블록의 수는 블록들을 쓰러뜨린 후 블록이 놓이지 않은 칸의 수와 같습니다.
- 추가해야 하는 큐브 블록의 수를 최소화하려면 블록들을 적절하게 쓰러뜨려 최대한 많은 칸에 블록이 놓이게 해야 합니다.
- 블록들을 적절히 쓰러뜨려 최대 몇 개의 칸을 덮을 수 있는지 구해 봅시다.

- ✓ 0번 칸에 있는 큐브 블록을 제외하고, 1번부터 N번 칸에 존재하는 블록들에 왼쪽부터 차례로 번호를 매긴 다음, 다음과 같이 DP 상태를 정의합니다.
  - $a[i]$: i번째 블록까지 고려했을 때, i번째 블록을 왼쪽으로 쓰러뜨려서 덮을 수 있는 칸 수의 최대값
  - $b[i]$: i번째 블록까지 고려했을 때, i번째 블록을 쓰러뜨리지 않고 덮을 수 있는 칸 수의 최대값
  - $c[i]$: i번째 블록까지 고려했을 때, i번째 블록을 오른쪽으로 쓰러뜨려서 덮을 수 있는 칸 수의 최대값
- ✓ 만약 어떤 블록을 어떤 방향으로 쓰러뜨리는 것이 불가능할 경우, 해당하는 DP 값은 $-\infty$로 설정합니다. 또한 $a[0] = b[0] = c[0] = 0$으로 간주합니다.

- ✓ i번째 블록이 놓인 칸 번호를 $pos[i]$, 그 블록의 높이를 $h[i]$ 라고 하고, DP 식을 세워 봅시다. 편의상 $pos[0] = h[0] = 0$ 으로 간주합니다.
- ✓ $a[i]$
  - i 번째 블록을 왼쪽으로 쓰러뜨렸을 때 덮이는 칸의 번호는 $(pos[i] - h[i])$ 부터 $(pos[i] - 1)$ 까지입니다.
  - $pos[i] - h[i] < 1$ 인 경우, 왼쪽에 충분한 공간이 없으므로 $a[i] = -\infty$ 입니다.
  - $pos[i-1] > pos[i] - h[i]$ 인 경우, $(i-1)$ 번째 블록 때문에 i번째 블록을 왼쪽으로 쓰러뜨릴 수 없으므로 $a[i] = -\infty$ 입니다.

- ✓ $a[i]$
  - 그 밖의 경우, $(i-1)$ 번째 블록의 위치에 따라 DP 식이 달라집니다.
    - $pos[i-1] = pos[i] - h[i]$ 인 경우: $a[i] = a[i-1] + h[i]$
    - $pos[i-1] < pos[i] - h[i] \leq pos[i-1] + h[i-1]$ 인 경우:
      $a[i] = max(a[i-1], b[i-1]) + h[i]$
    - $pos[i-1] + h[i-1] < pos[i] - h[i]$ 인 경우:
      $a[i] = max(a[i-1], b[i-1], c[i-1]) + h[i]$

- ✓ $b[i]$
  - i 번째 블록을 쓰러뜨리지 않습니다. DP 식의 조건 분기가 비교적 간단해집니다.
    - $pos[i-1] + h[i-1] \geq pos[i]$ 인 경우: $b[i] = max(a[i-1], b[i-1]) + 1$
    - $pos[i-1] + h[i-1] < pos[i]$ 인 경우: $b[i] = max(a[i-1], b[i-1], c[i-1]) + 1$

- ✓ $c[i]$
  - i 번째 블록을 오른쪽으로 쓰러뜨립니다. 이때 블록이 덮는 칸의 번호는 $(pos[i]+1)$ 부터 $(pos[i]+h[i])$ 까지입니다.
  - 일단 오른쪽에 충분한 공간이 있어야 하므로, $pos[i]+h[i] > N$ 인 경우 $c[i] = -\infty$ 입니다.
  - $c[i]$ 는 i 번째 블록까지만을 고려하므로 오른쪽에 있는 블록의 존재는 여기서 고려하지 않습니다. 따라서 DP 식은 다음과 같이 정리됩니다.
    - $pos[i-1]+h[i-1] > pos[i]$ 인 경우: $c[i] = max(a[i-1], b[i-1]) + h[i]$
    - $pos[i-1]+h[i-1] \leq pos[i]$ 인 경우: $c[i] = max(a[i-1], b[i-1], c[i-1]) + h[i]$

240

- ✓ 모든 DP 값을 다 구했다면 답을 출력합니다. $1 \sim N$ 번 칸에 존재하는 블록의 수가 v 일 경우, 출력해야 하는 답은 $N - \max(a[v], b[v], c[v])$ 입니다.

1G. 무자비한 최단경로

`dijkstra`
출제진 의도 – **Hard**

- ✓ 제출 10번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `djs100201`

- ✓ 잘 알려진 테크닉을 배웠으면 하는 마음에 출제하게 되었습니다.
- ✓ 좌표 차이가 비용인 여러 문제가 출제되기에 꼭 알아가도록 합시다.

- ✓ 우선 x, y 좌표 부터 해결하고, z 좌표를 해결해 보도록 합시다.
- ✓ 단순히 모든 정점 쌍에 대해서 간선을 계산 후 이어주게 되면, 너무 많은 간선이 생겨서 문제를 시간 내에 해결할 수 없습니다.
- ✓ x, y 좌표가 인접한 정점 끼리만 간선을 이어주면 된다는 것이 핵심입니다.
- ✓ 이는 인접하지 않은 쌍 끼리의 간선은, 인접한 정점만이 간선으로 연결되어 있는 경로로 동일하게 나타낼 수 있기 때문입니다.

- ✓ 이제 z 좌표를 해결해 봅시다.
- ✓ 이는 추가 정점을 설정함으로써 문제를 해결할 수 있습니다.
- ✓ 각각 k 로 나눈 나머지에 따라서 $n+1, n+2, \cdots, n+k$ 번 정점을 만들어 줍시다.
- ✓ 우리는 z 좌표를 이용하는 간선은 $n+1, n+2, \cdots, n+k$ 번의 추가 정점을 중간에 순회하여 이동할 것입니다.

- 정점 z_i를 k로 나눈 나머지를 x라고 하고, $k-x$를 k로 나눈 나머지를 다시 y라고 합시다.
- 정점 i에서 $n+x+1$로 가중치 z_i인 간선을, 정점 $n+y+1$에서 정점 i로 가중치 z_i인 간선을 이어줍니다.
- 이렇게 이어주게 되면, 문제에 주어진 모든 간선을 그래프가 정확하게 표현할 수 있습니다.
- 간선은 $4N$개 정도로, Dijkstra 알고리즘을 사용하여 문제를 해결할 수 있습니다.

240

2A. 단순한 문제 (Large)

`number_theory`, `math`
출제진 의도 – **Easy**

- ✓ 제출 13번, 정답 12명 (정답률 92.308%)
- ✓ 처음 푼 사람: **luciaholic**, 5분
- ✓ 출제자: `tlsdydaud1`

2A. 단순한 문제 (Large)

240

- ✓ 입력값의 범위가 크므로 완전 탐색으로는 제한 시간 안에 문제를 풀 수 없습니다.
- ✓ 주어진 식을 잘 관찰해 봅시다.

240

- ✓ $(x \mod y) = (y \mod z) = (z \mod x) = k$ 라고 하면, 나머지 연산의 성질에 의해서 $k < x$, $k < y, k < z$ 입니다.
- ✓ 따라서 $(x \mod y) < x, (y \mod z) < y, (z \mod x) < z$ 입니다.
- ✓ $(x \mod y) < x$ 는 $x \geq y$ 와 동치입니다. 같은 논리로 $y \geq z, z \geq x$ 입니다.
- ✓ 종합하면 $x \geq y \geq z \geq x$ 이며, 이것이 성립하는 경우는 $x = y = z$ 인 경우뿐입니다.
- ✓ 따라서 $\min(a, b, c)$ 가 조건을 만족하는 쌍의 개수와 같음을 알 수 있습니다.

240

2B. 토큰

scc

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 23번, 정답 10명 (정답률 43.478%)
- 처음 푼 사람: **ok10p**, 15분
- 출제자: `tlsdydaud1`

- ✓ 첫 번째 상태에서 두 번째 상태를 거쳐서 다시 첫 번째 상태로 돌아오기 위한 조건을 알아봅시다.
- ✓ 간선을 따라 이동해서 어떤 정점 u로 갈 수 있는 정점의 집합을 $S(u)$라고 하면, 토큰을 어떻게 움직이더라도 $S(u)$에 속하는 정점들 위에 놓인 토큰의 수 $c[u]$는 증가하지 않습니다.
- ✓ 첫 번째 상태에서 두 번째 상태를 만드는 것이 가능하려면 각각의 정점 i에 대해 $c[i]$가 줄어드는 경우가 없어야 합니다. 이것은 두 번째 상태에서 첫 번째 상태를 만들 때도 똑같이 적용되므로, 첫 번째 상태와 두 번째 상태를 비교했을 때 모든 i에 대해 첫 번째 상태의 $c[i]$ 값과 두 번째 상태의 $c[i]$ 값이 같아야 합니다.

240

- ✓ 토큰을 움직였을 때 $c[i]$ 의 값이 하나라도 변했을 경우, 토큰이 움직이기 전에 있던 정점과 움직인 정점은 서로 다른 SCC에 속합니다.
- ✓ 따라서 미션을 성공적으로 수행하기 위해서는 토큰을 다른 SCC로 움직이면 안 되며, 그래프의 어떤 SCC에 속한 정점들에 놓인 토큰의 수가 두 상태에서 서로 다른 경우가 존재한다면 답이 NO임을 알 수 있습니다.

240

- 그런 경우가 존재하지 않을 경우 답이 항상 YES임을 증명합시다.
- 앞에서 답이 NO인 경우를 걸러내고 나면 모든 SCC가 두 상태에서 같은 수의 토큰을 포함하는 경우만 남습니다. 또한 토큰을 다른 SCC로 움직일 일이 없어졌기 때문에 각각의 SCC를 따로 처리해도 됩니다. 따라서 한 SCC 안에서 가능한 모든 상태 간에 서로 전환이 가능함을 보이면 됩니다.

240

- ✓ 어떤 SCC에서 토큰이 놓인 정점 u와 토큰이 놓이지 않은 정점 v를 임의로 선택하고, u에서 v로 가는 경로를 아무거나 하나 고릅니다. 이 경로는 같은 정점을 두 번 이상 지나지 않아야 합니다.
- ✓ 이 경로에는 토큰이 하나 이상 놓여 있습니다. 토큰이 놓인 정점의 번호를 경로에서 나타나는 순서대로 $p_1, p_2, \ldots, p_k$라고 합시다.
- ✓ 경로에서 정점 p_k와 v 사이에는 토큰이 존재하지 않습니다. 따라서 정점 p_k에서 경로를 따라 정점 v로 토큰을 움직일 수 있습니다.

- 같은 방식으로 정점 p_{k-1} 에서 정점 p_k 로 토큰을 움직이고, 정점 p_{k-2} 에서 정점 p_{k-1} 로 토큰을 움직이고, ... 정점 p_1 에서 정점 p_2 로 토큰을 움직입니다. 이제 정점 p_1 에 있던 토큰이 없어지고 정점 v 에 토큰이 놓였고, 나머지 정점의 상태는 처음과 동일합니다. p_1 과 u 는 동일한 정점이므로 정점 u 에서 정점 v 로 토큰을 움직인 것과 같은 효과를 내는 데 성공했습니다.
- 이 방법을 반복하면 한 SCC 안에서 가능한 모든 상태 간에 전이가 가능함을 알 수 있습니다.

240

2C. 반짝반짝 3

`linearity_of_expectation`, `probability`, `tree`

출제진 의도 – **Medium**

- ✓ 제출 37번, 정답 4명 (정답률 10.811%)
- ✓ 처음 푼 사람: **portal3046**, 60분
- ✓ 출제자: `lky7674`

- 중급 4회차 필수 문제이자 SUAPC 2021 Summer의 기출문제인 반짝반짝 2에서 확장시킨 문제입니다.
- 우선 쉬운 버전인 반짝반짝 2부터 풀어보도록 하겠습니다.
- 불이 들어온 기존 전구 개수의 확률변수를 X, 불이 들어온 추가 전구 개수의 확률변수를 Y 라고 합시다.
- 불이 들어온 전구 개수의 기댓값은 $E(X+Y)$로 표기할 수 있습니다.

Theorem : 임의의 확률변수 X, Y 에 대해서 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 를 만족한다.

- ✓ 위의 Theorem은 확률변수 X, Y 가 서로 독립이 아니어도 성립합니다.
- ✓ 때문에 $E(X)$ 와 $E(Y)$ 를 따로 계산하면 됩니다.

240

- i번째 전구가 불이 들어오는지에 대한 확률변수를 X_i로 정의합시다.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i\text{번째 전구가 켜진 경우} \\ 0, & \text{if } i\text{번째 전구가 꺼진 경우} \end{cases}$$

- $E(X_i) = p_i$를 만족합니다.

- ✓ X_i 의 정의에 따라서 확률변수 X 를 $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ 로 표현할 수 있습니다.
- ✓ 따라서 $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i$ 를 만족합니다.

240

- i번째 전구와 $i+1$번째 전구 사이에 있는 추가 전구를 i번째 추가 전구라고 합시다.
- i번째 추가 전구에 불이 들어오는지에 대한 확률변수를 Y_i로 정의합시다.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i\text{번째 추가 전구가 켜진 경우} \\ 0, & \text{if } i\text{번째 추가 전구가 꺼진 경우} \end{cases}$$

- $E(Y_i) = p_i\left(1-p_{i+1}\right) + p_{i+1}\left(1-p_i\right)$를 만족합니다.

- Y_i 의 정의에 따라서 확률변수 Y 를 $Y = \sum_{i=1}^{N-1} Y_i$ 로 표현할 수 있습니다.
- 따라서 $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{N-1} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{N-1} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \{p_i (1 - p_{i+1}) + p_{i+1} (1 - p_i)\}$ 를 만족합니다.

- ✓ 이 풀이를 트리 버전으로 확장시킬 수 있습니다.
- ✓ 주어진 트리를 T 라고 하겠습니다.
- ✓ 정점에 붙어있는 불이 들어온 전구 개수의 기댓값은 $\sum_{i=1}^{N} p_i$ 로 동일합니다.
- ✓ 간선에 붙어있는 불이 들어온 전구 개수의 기댓값은 $\sum_{(u,v)\in T} p_u(1-p_v)+p_v(1-p_u)$ 가 됩니다.

- ✓ 이제 p_i 를 p_i' 로 바뀌었을 때, 불이 들어온 전구 개수의 기댓값을 $O(1)$ 에 구해봅시다.
- ✓ 정점 부분은 간단합니다. $\sum_{i=1}^{N} p_i$ 을 저장하는 변수 하나를 만들고, 이 값에 p_i 를 빼고 p_i' 를 더하는 식으로 관리하면 됩니다.

- ✓ 간선 부분은 조금 생각해야 합니다.
- ✓ 정점의 degree의 최댓값이 $N-1$개이기 때문에, 이웃한 간선들을 모두 탐색하면서 기댓값을 계산하면 시간복잡도가 $O(QN)$이 되므로 시간 초과가 발생합니다.
- ✓ 이를 좀 더 최적화 해봅시다.

$$\sum_{(u,v)\in T} p_u(1-p_v)+p_v(1-p_u) = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i \sum_{j\in child(i)}(1-p_j) + (1-p_i)\sum_{j\in child(i)} p_j\right)$$

- ✓ 간선에 붙어있는 불이 들어온 전구 개수의 기댓값에 대한 수식을 위와 같이 변형할 수 있습니다.
- ✓ 각 정점 별로 자식들의 p_j 의 합과 $(1-p_j)$ 의 합을 저장하는 변수를 만들고 관리하면 됩니다.
- ✓ p_i 를 p_i' 로 바뀌었을 때, i 번 노드의 부모 노드에 저장된 2개의 변수 값을 변경하고 이에 따라서 기댓값을 계산하면 됩니다.
- ✓ 최근에 이와 비슷한 방법으로 풀 수 있는 문제가 KOI 2022 2차 고등부 1번으로 출제 되었습니다. 이 문제도 같이 풀어보시면 좋습니다.

240

2D. 수열의 점수

`divide_and_conquer`, `prefix_sum`
출제진 의도 – **Hard**

- ✓ 제출 4번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `gumgood`

Divide and Conquer 전략으로 해결할 수 있습니다.

- ✓ 구간 $[s, e]$ 에 속하는 모든 부분 수열의 점수를 구하는 함수를 $f(s, e)$ 라고 합시다.
- ✓ 해당 구간을 절반으로 나눠 생각해봅시다. 구간의 중앙을 m 이라 하면, 이 구간에 속하는 모든 부분 수열을 다음과 같이 나눌 수 있습니다.
  1. $[s, m]$ 에 속하는 부분 수열
  2. $[m + 1, e]$ 에 속하는 부분 수열
  3. b_m 과 b_{m+1} 을 모두 포함하는 부분 수열
- ✓ 1, 2번의 경우는 각각 $f(s, m)$ 와 $f(m + 1, e)$ 의 값과 같습니다.
- ✓ 3번 경우인 b_m 과 b_{m+1} 을 모두 포함하는 부분 수열의 점수를 구해보겠습니다.

- ✓ 3번에 해당하는 수열은 $s \le l \le m$ 과 $m+1 \le r \le e$ 를 만족하는 $b_l, \ldots, b_r$ 과 같습니다.
- ✓ r 을 고정해놓고 모든 l 에 대해 수열의 점수를 구해봅시다.
- ✓ 먼저 오른쪽 구간에 해당하는 $\min(b_{m+1}, b_r)$ 와 $\max(b_{m+1}, b_r)$ 를 계산합니다.
- ✓ 그러면 왼쪽 구간은 min, max 값에 따라 각각 두 구간으로 나뉘게 됩니다.
  - $\min(b_l, b_m) \ge \min(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간과 $\min(b_l, b_m) < \min(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간
  - $\max(b_l, b_m) \le \max(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간과 $\max(b_l, b_m) > \max(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간
- ✓ 즉, 특정 r 에 대해 왼쪽 구간의 모든 l 을 네 가지의 경우로 나눌 수 있습니다.

3.1 $\min(b_l, b_m) \geq \min(b_{m+1}, b_r), \max(b_l, b_m) > \max(b_{m+1}, b_r)$

- $\min(b_l, b_r) = \min(b_{m+1}, b_r)$ 이고 $\max(b_l, b_r) = \max(b_l, b_m)$ 인 구간입니다.
- 이 구간의 점수는 여기에 속하는 모든 l 에 대해 $\max(b_l, b_m)$ 의 합과 $\min(b_{m+1}, b_r)$ 을 곱한 값으로 계산할 수 있습니다.

3.2 $\min(b_l, b_m) < \min(b_{m+1}, b_r), \max(b_l, b_m) \leq \max(b_{m+1}, b_r)$

- $\min(b_l, b_r) = \min(b_l, b_m)$ 이고 $\max(b_l, b_r) = \max(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간입니다.
- 이 구간의 점수는 여기에 속하는 모든 l 에 대해 $\min(b_l, b_m)$ 의 합과 $\max(b_{m+1}, b_r)$ 을 곱한 값으로 계산할 수 있습니다.

3.3 $\min(b_l, b_m) \geq \min(b_{m+1}, b_r), \max(b_l, b_m) \leq \max(b_{m+1}, b_r)$

- $\min(b_l, b_r) = \min(b_{m+1}, b_r)$ 이고 $\max(b_l, b_r) = \max(b_{m+1}, b_r)$ 인 구간입니다.
- 해당 구간에 속하는 각 부분 수열의 점수는 $\min(b_{m+1}, b_r) \cdot \max(b_{m+1}, b_r)$ 입니다.

3.4 $\min(b_l, b_m) < \min(b_{m+1}, b_r), \max(b_l, b_m) > \max(b_{m+1}, b_r)$

- $\min(b_l, b_r) = \min(b_l, b_m)$ 이고 $\max(b_l, b_r) = \max(b_l, b_m)$ 인 구간입니다.
- 해당 구간에 속하는 각 부분 수열의 점수는 $\min(b_l, b_m) \cdot \max(b_l, b_m)$ 입니다.

- ✓ 3.3에서 $\min(b_{m+1}, b_r) \cdot \max(b_{m+1}, b_r)$ 은 고정된 값으로 $O(1)$ 에 계산할 수 있습니다.
- ✓ 3.1, 3.2, 3.4는 각각 $\max(b_l, b_m)$, $\min(b_l, b_m)$, $\min(b_l, b_m) \cdot \max(b_l, b_m)$ 에 대해 구간 합이 필요합니다.
  - prefix array를 이용해 전처리해두면 모두 $O(1)$ 에 얻을 수 있습니다.
- ✓ 이를 모든 $m + 1 \leq r \leq e$ 에 대해 반복하면 됩니다.

- ✓ 구간의 길이를 $n = e - s + 1$ 이라고 했을 때, 구간을 나누는 경계는 $O(n)$ 는 계산할 수 있습니다.
- ✓ prefix array 또한 $O(n)$ 에 한 번만 전처리해두면 모든 r 에 대해 $O(1)$ 에 구간 합을 계산할 수 있습니다.
- ✓ 따라서 구간 $[s, e]$ 에서 b_m 과 b_{m+1} 을 모두 포함하는 부분 수열의 점수를 $O(n)$ 에 계산할 수 있습니다.

- ✓ $f(s, e)$의 시간복잡도를 $T(n)$이라고 하면 $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n)$을 만족하므로 전체 시간복잡도 $O(N \log N)$에 해결할 수 있습니다.
- ✓ monontone stack, segment tree를 이용하여 $O(N \log N)$에 해결할 수도 있습니다.

240

2E. Mexor Tree

`lca`, `dfs`

출제진 의도 – **Hard**

- ✓ 제출 10번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `djs100201`

- ✓ 이 문제는 dfs를 잘 쓰길 바라는 마음에 문제를 출제하게 되었습니다.
- ✓ 문제 제목은 MEX 연산과 XOR 연산을 합친 언어유희 입니다.

- ✓ 이 문제는 크게 두 부분으로 나누어져 있습니다.
- ✓ XOR 쿼리를 처리하는 첫 번째 부분과 수열 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ 을 구하는 두 번째 부분입니다.
- ✓ 우선 XOR 쿼리를 먼저 처리해 봅시다.
- ✓ $hld(heavy\ light\ decomposition)$ 라는 잘 알려진 테크닉을 이용하면 $O(M(logN)^2)$ 정도에 해결할 수 있지만, 더 쉽게 해결하는 방법이 있습니다.

- ✓ 쿼리 (X, Y, Z) 가 입력으로 들어오게 됐을 때를 생각해 봅시다.
- ✓ 루트와 X 까지의 단순경로, 루트와 Y 까지의 단순경로를 Z 와 XOR 연산을 시행한 값으로 업데이트 해 봅시다.
- ✓ 그렇다면 X 와Y 의 $lca(X, Y)$ 를 제외한 모든 정점의 업데이트가 올바르게 이루어짐을 알 수 있습니다.
- ✓ 따라서 $lca(X, Y)$ 만 따로 추가적인 처리를 해 주면 됩니다.

- 왜 이런식으로 쿼리를 처리할 까요?
- 이는 임의의 두 정점쌍에 대한 쿼리를 루트와 정점으로의 쿼리로 바꿀 수 있기 때문입니다.
- XOR 연산은 교환법칙이 성립합니다. 따라서 배열을 만들고 모은 후, 한번에 처리합시다.
- $val[300001]$ 이라는 int 형 배열을 만든 후, 쿼리마다 $val[X], val[Y], a[lca(x,y)]$ 이 3가지 부분에 Z 와 XOR연산을 해줍니다.
- 그 후 dfs 를 이용해서 적절히 처리해주면 XOR 쿼리를 해결할 수 있습니다.

- 두 번째 부분을 처리해 봅시다.
- 이는 첫 번째 부분의 원리를 깨달았다면 비슷하게 처리할 수 있습니다.
- 여기서는 S가 고정되어 있기 때문입니다.
- 마찬가지로 dfs를 이용하면 S와 임의의 정점까지의 단순 경로상의 존재하는 모든 정점 값들의 집합을 알 수 있습니다.

- ✓ 따라서 S를 루트로 한 후 dfs를 하면서 b_i들을 구해주면 됩니다.
- ✓ b_i를 구하는 방법은 set이나 $segment\ tree$와 같은 자료구조로 처리해 줍시다.
- ✓ 따라서 전체 문제는 $O((M+N)\,logN)$ 정도에 해결됩니다.

240

2F. 전깃줄 연결

`dp`, `monotone_queue`

출제진 의도 – **Challenging**

- ✓ 제출 1번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `gumgood`

2F. 전깃줄 연결

Dynamic Programming으로 해결할 수 있습니다.

- ✓ $dp[i]$를 i번째 전봇대에 전력을 공급하는 최소 비용으로 정의합시다.
- ✓ $1 \le j < i$인 j번째 전봇대까지 최소 비용으로 전력을 공급한 후, i번째 전봇대에 전깃줄을 이어 전력을 공급하는 비용은 다음과 같습니다.

$$dp[j] + C_j + C_i - 2 \cdot \gcd(C_j, \ldots, C_i) + \sum_{k=j+1}^{i-1} B_k$$

- ✓ $sB_i = \sum_{k=1}^{i} B_k$로 정의합니다. 이때, 다음과 같은 식으로 $dp[i]$ 값을 구할 수 있습니다.

$$dp[i] = C_i + sB_{i-1} + \min(dp[j] + C_j - sB_j) - 2 \cdot \gcd(C_j, \ldots, C_i)$$

- ✓ 각 i 마다 모든 j 에 대해 값을 $O(1)$ 에 갱신하더라도 $O(N^2)$ 으로 TLE(시간 초과)를 받게 됩니다.
- ✓ 다음과 같이 관찰해봅시다.
  - j 부터 i 사이에 대해 가능한 $\gcd(C_j, \ldots, C_i)$ 의 종류는 $\log C_i$ 개를 넘지 않습니다.
  - 즉, 1 에서 $i-1$ 까지의 구간을 $\gcd$ 값에 따라 최대 C_i 개의 구간으로 나눌 수 있습니다.
  - 각 구간마다 $\gcd$ 값과 $dp[j] + C_j - sB_j$ 의 최소값을 저장하여 $\log C_i$ 개의 구간에 대해서만 확인하면 됩니다.

- ✓ 이때 각 구간은 j 가 증가함에 따라 $\gcd(C_j, \ldots, C_i)$ 도 증가합니다.
  - $\gcd(C_j \ldots C_i) \leq \gcd(C_{j+1} \ldots C_i)$ 이기 때문입니다.
- ✓ 단조성을 유지하는 monotone stack으로 각 구간의 gcd 값과 $dp[j] + C_j - sB_j$ 의 최소값을 관리할 수 있습니다.
- ✓ monotone stack의 최대 길이는 gcd 의 종류와 같은 $\log C_i$ 개로 $O(\log C_i)$ 에 새로 구간을 나누고 각 구간에 저장할 값을 갱신할 수 있습니다.
- ✓ 따라서 전체 시간복잡도 $O(N \log(\max(C_i))$ 에 해결할 수 있습니다.

240

2G. 까다로운 형제

`dp`, `lis`, `sliding_window`

출제진 의도 – **Challenging**

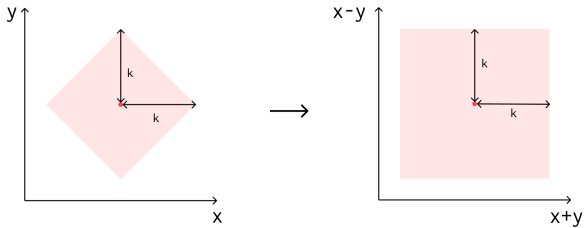
- ✓ 제출 1번, 정답 0명 (정답률 00.000%)
- ✓ 처음 푼 사람: —, —분
- ✓ 출제자: `gumgood`

- ✓ 비슷한 문제가 많은 전형적인 유형의 문제입니다.
- ✓ 다양한 풀이가 존재하지만 그 중 가장 쉽다고 생각하는 풀이를 소개하겠습니다.

2G. 까다로운 형제

240

- (x, y) 좌표계 위 한 여행지에서 거리가 k 이하인 곳은 왼쪽 그림과 같습니다.
- 편의를 위해 (x, y) 좌표계를 $(u, v) = (x + y, x - y)$ 좌표계로 변환하겠습니다.
- 좌표계를 -45 도 회전하여 늘린 모양으로 모든 좌표값을 정수로 유지할 수 있습니다.

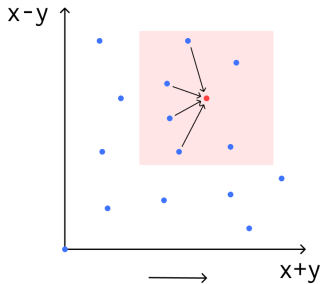


여행 경로에 필요한 조건은 다음과 같습니다.

1. 여행지는 (x, y) 좌표계에서 원점에서 멀어지는 순으로 선택해야 합니다.
   - 회전한 좌표계에서 $u = x + y$ 가 증가하는 순과 같습니다.
2. 연속한 두 여행지는 (x, y) 좌표계에서 거리가 K 이하를 만족해야 합니다.
   - 회전한 좌표계 위 두 점 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ 에 대해 $|u1 - u2| \leq K$ 이고 $|v1 - v2| \leq K$ 인 것과 같습니다.

- ✓ 먼저 첫 번째 조건을 위해 u가 증가하는 순으로 여행지를 정렬합니다.
- ✓ 그러면 i번째 여행지에 도달할 수 있는 후보를 1번째부터 $i-1$번째 여행지로 제한하게 됩니다.
- ✓ 이제 Dynamic Programming으로 접근할 수 있습니다. 다음과 같이 DP식을 정의하겠습니다.
  - $dp[i] = i$번째 여행지에 도착했을 때 얻을 수 있는 최대 (만족도 합, 여행지 개수)

- ✓ i 번째 여행지의 변환된 좌표를 (u_i, v_i) 라고 합시다.
- ✓ $j < i$ 인 j 번째 여행지에 대해 $u_i - K \leq u_j \leq u_i + K$ 와 $v_i - K \leq v_j \leq v_i + K$ 를 만족하는 곳에서 i 번째 여행지로 갈 수 있습니다.



- segment tree에 각 $v(=x-y)$ 값에 해당하는 여행지의 DP값을 저장합시다.
- 각 i 번째 여행지를 기준으로 $v_i - K \leq v_j \leq v_i + K$ 에 있는 여행지의 최소 DP값을 알 수 있습니다.
- 하지만 $u_j < u_i - K$ 에 있는 여행지의 값은 제외해야 합니다.
- $u(=x+y)$ 축을 따라 sliding window를 하면서 segment tree에 DP값을 추가하거나 제거하여 해결할 수 있습니다.

- ✓ 좌표의 범위가 크기 때문에 좌표 압축이 필요합니다.
- ✓ segment tree에 값을 제거하기 위해 queue 자료구조를 활용하거나 압축 전 좌표를 통해 쿼리의 범위를 잘 설정하는 방법이 있습니다.
- ✓ 전체 시간복잡도 $O(N \log N)$ 에 해결할 수 있습니다.