31410 풀이

수직선 상에 가장작은 x_i 부터 정화할 때 필요한 제독제의 양 L은 다음과 같습니다

$$L = \sum_{i=1}^{N} p_i \ + \sum_{i=2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-1)$$

이때 p_i 의 총합에 대하여 앞으로는 P로 정의하겠습니다

$$L = P \ + \sum_{i=2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-1)$$

가장작은 x_i 부터 정화하며 k 번째 위치를 제외할 때 필요한 제독의 양 L_k는 다음과 같습니다

$$L_k = (P - p_k) \ + \sum_{i=2}^{k-1} (x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=k+1}^{k+1} (x_i - x_{i-2})(i-2) + \sum_{i=k+2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-2)$$

$k-1$번째 까지는 사용횟수에 변함이 없지만,

$k+1$번째 부터는 각 지점에서의 사용횟수가 L과 비교하여 1씩 줄어든 상태입니다

이때의 L_k는 $1 < k$ 이고, $k+2 \leq N$ 이라는 전제를 갖습니다

이 상황에 대하여 진행한 다음 $k+1 = N$ 이거나 $k = N$ 일때의 결과를 설명하겠습니다

(1) $1 < k \leq N-2$

여기서 L과 L_k가 공통이 되는 누적합 부분을 갖도록 L을 분리하면 다음과 같습니다

$$L = P \ + \sum_{i=2}^{k-1} (x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=k}^{k+1} (x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=k+2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-1)$$

전체를 더한 L과 k번째를 제외한 L_k의 결합이 가능해집니다

$$L_k = L \ - \ p_k \ - \sum_{i=k}^{k+1} (x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=k+1}^{k+1} (x_i - x_{i-2})(i-2) \\ + \sum_{i=k+2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-2) \ - \sum_{i=k+2}^{N} (x_i - x_{i-1})(i-1)$$

sigma의 성질에 의해 연산범위가 같은 서로다른 수열끼리 합차 연산이 가능합니다

$$L_k = L \ - \ p_k \ - \ \sum_{i=k}^{k+1}(x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=k+1}^{k+1}(x_i - x_{i-2})(i-2)$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{N}(x_i - x_{i-1})[(i-2)-(i-1)]$$
$$= L \ - \ p_k \ - \sum_{i=k}^{k+1}(x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \ \sum_{i=k+1}^{k+1}(x_i - x_{i-2})(i-2) \ - \sum_{i=k+2}^{N}(x_i - x_{i-1})(1)$$

먼저 전개할 수 있는 시그마 계산에 대해 다음과 같습니다 (A)

$$- \sum_{i=k}^{k+1}(x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \ \sum_{i=k+1}^{k+1}(x_i - x_{i-2})(i-2)$$

$$= -(x_k - x_{k-1})(k-1) - (x_{k+1} - x_k)(k) + (x_{k+1} - x_{k-1})(k-1)$$

$$= (k-1)(x_{k+1} - x_{k-1} - x_k + x_{k-1}) - (k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= (k-1)(x_{k+1} - x_k) - \ (k)(x_{k+1} - xk)$$

$$= (k-1-k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= (x_k - x_{k+1})$$

위에서 만들어진 특수한 수열에 대하여 다음과 같은 항등식은 자명합니다 (B)

$$\sum_{i=k+2}^{N}(x_i - x_{i-1}) = x_N \ - \ x_{k+1}$$

모두 전개된 L_k를 합쳐 최종 정리하면 다음과 같습니다

$$L_k = L \ - \ p_k \ + \ x_k \ - \ x_{k+1} \ + \ x_{k+1} \ - \ x_N$$

$$= L \ - \ (p_k \ + \ x_N \ - \ x_k)$$

이로써 L_k은 p_k와 함께 **N번째 위치와 k번째 위치의 거리차를 뺌**으로써 간단하게 도출됩니다

(2) $k = N - 1$

(1)에서 사용한 L_k에서 범위조건에 부합하지않는 일부 시그마 연산이 제외됩니다

$$L_k = (P - p_k) \ + \sum_{i=2}^{k-1}(x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \ \sum_{i=k+1}^{k+1}(x_i - x_{i-2})(i-2)$$

하지만 L 또한 일부 시그마 연산이 제외됨으로써 (1)과 같은 유도 과정에서도 일부 시그마 연산이 제외된 상태로 진행되는 것과 같습니다

따라서 도출되는 결과는 다음과 같습니다

$$L_k = L \ - \ p_k \ + \ x_k \ - \ x_{k+1}$$

$$= L \ - \ (p_k \ + \ x_{k+1} \ - \ x_k)$$

$k = N-1$ 인 경우에는 $L - (p_k + x_N - x_{N-1})$ 이므로 결국 (1)에서 유도한 식이 $1 < k < N$ 인 경우에 성립함을 알 수 있습니다

(3) $k = N$

(1)에서 사용한 L_k에서 범위조건에 부합하지않는 일부 시그마 연산이 제외됩니다

$$L_N = (P - p_N) \ + \sum_{i=2}^{N-1}(x_i - x_{i-1})(i-1)$$

결합이 가능하도록 L을 변형하면 다음과 같습니다

$$L = P + \sum_{i=2}^{N-1}(x_i - x_{i-1})(i-1) + \sum_{i=N}^{N}(x_i - x_{i-1})(i-1)$$

따라서 L_k는 다음과 같이 도출됩니다

$$L_N = L - (p_N + (N-1)(x_N - x_{N-1}))$$

(4) $k = 1$

(1) 도출 방식과 비슷하지만 더욱 쉽습니다

$$L_1 = (P - p_1) + \sum_{i=3}^{N}(x_i - x_{i-1})(i-2)$$

L을 L_1에 맞춰 분할하면 다음과 같습니다

$$L = P \ + \sum_{i=2}^{2}(x_i - x_{i-1})(i-1) \ + \sum_{i=3}^{N}(x_i - x_{i-1})(i-1)$$

L과 L_k을 결합합니다

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (L - p_1) - (x_2 - x_1) + \sum_{i=3}^{N}(x_i - x_{i-1})(i-2) - \sum_{i=3}^{N}(x_i - x_{i-1})(i-1) \\
&= (L - p_1) - (x_2 - x_1) - \sum_{i=3}^{N}(x_i - x_{i-1}) \\
&= (L - p_1) - (x_2 - x_1) - (x_N - x_2) \\
&= L - p_1 - x_N + x_1 \\
&= L - (p_1 + x_N - x_1)
\end{aligned}
$$

(5) R?

지금까지는 위치 값이 가장 작은 곳부터 이동할 때를 가정했습니다

이와 반대로 가장 큰 곳부터 이동할 때에는 L에 대한 과정의 역순이기 때문에 R에 대하여 유도될 식은 L과 비슷하며, k의 조건에 따라 사용해야 할 유도식은 대칭으로 반대가 됩니다